

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 23-07-2026

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y^3 - 2x \\ \dot{y} = \frac{\mu}{2}(x + x^3) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in (-1, 1)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2 - 2y^2)y - x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

- (a) Trovare i punti fissi e studiarne la stabilità.
- (b) Discutere l'esistenza di orbite periodiche.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita per $\lambda \in (0, 3]$ da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \lambda x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{3}] \\ (2\lambda - 3)x + 2 - \lambda, & x \in J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \lambda(1 - x), & x \in J_3 = [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

- (a) Costruire l' f -grafo di $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$.
- (b) Discutere l'esistenza e la stabilità dei punti fissi di f_λ . Per quali valori di λ si possono avere orbite periodiche (o punti fissi) attrattive?
- (c) Discutere il comportamento caotico di f_λ per $\lambda \in (2, 3]$.

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y^3 - 2x \\ \dot{y} = \frac{\mu}{2}(x + x^3) \end{cases}, \quad \mu \in (-1, 1)$$

Distinguiamo due casi, $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$.

Poniamo $\mu \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Troviamo i punti fissi del sistema. Dalla seconda equazione si trova $x(1+x^2)=0$, quindi $x=0$, che sostituito nella prima equazione ci permette di trovare tre punti fissi:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = (0, -1).$$

Studiamo le loro stabilità. Si ha

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1-3y^2 \\ \frac{\mu}{2}(1+3x^2) & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$- \quad JF(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_1) = -\frac{\mu}{2}, \quad \text{tr } JF(P_1) = -2.$$

Se $\mu \in (0, 1)$, P_1 è punto iperbolico instabile di tipo sella ($\det < 0$);

se $\mu \in (-1, 0)$, P_1 è punto iperbolico stabile di tipo nodo ($\text{tr}^2 - 4\det = 4 + 2\mu > 0$).

$$- \quad JF(P_2) = JF(P_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_2) = \mu, \quad \text{tr } JF(P_2) = -2.$$

Se $\mu \in (0, 1)$, P_2 e P_3 sono punti iperbolici stabili di tipo nodo ($\text{tr}^2 - 4\det = 4 - 4\mu > 0$);

se $\mu \in (-1, 0)$, P_2 e P_3 sono punti iperbolici instabili di tipo sella ($\det < 0$).

Rette invarianti. Non possono esistere rette invarianti parallele agli assi. Per le altre,

ponendo $I(x, y) = ax + by$, $a, b \neq 0$, si ha per $c \in \mathbb{R}$

$$\dot{I}(x, y)|_{\{I=c\}} = a\dot{x} + b\dot{y}|_{ax+by=c} = a(y - y^3 - 2x) + b\frac{\mu}{2}(x + x^3)|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= \frac{a}{b}(c - ax) - \frac{a}{b^3}(c - ax)^3 - 2ax + \frac{b\mu}{2}x + \frac{b\mu}{2}x^3 =$$

$$= \frac{ac}{b} - \frac{a^3c^3}{b^3} + x\left(-\frac{a^2}{b} + \frac{3a^2c^2}{b^3} - 2a + \frac{b\mu}{2}\right) - \frac{3a^3}{b^3}x^2 + x^3\left(-\frac{a^4}{b^3} + \frac{b\mu}{2}\right)$$

Quindi $I(x,y)|_{I=c} \equiv 0$ implica $a=b=0$, che non è possibile. Quindi concludiamo che non esistono rette invarianti.

Orbite periodiche. Si ha $\det F(x,y) = \det JF(x,y) = -2$. Quindi per il criterio di Bendixson-Dulac non possono esistere orbite periodiche.

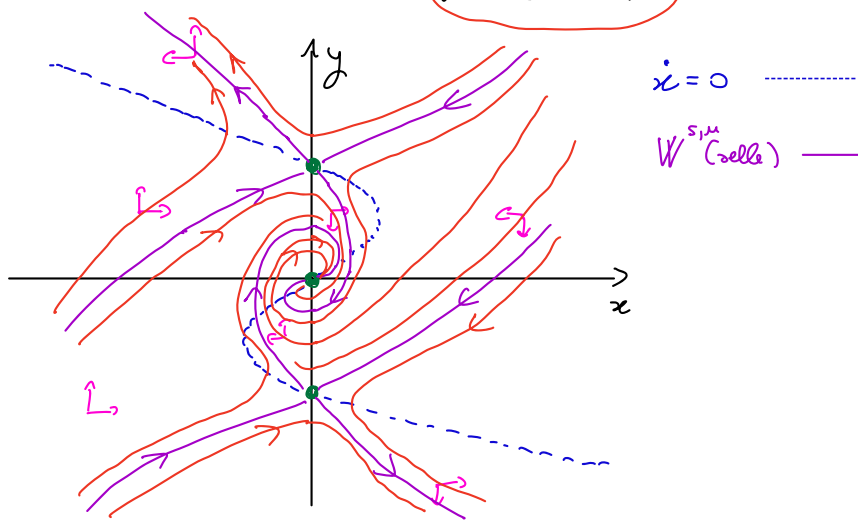
Simmetrie. Se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$.

Infatti, ponendo $S(x,y) = (-x, -y)$ si ha

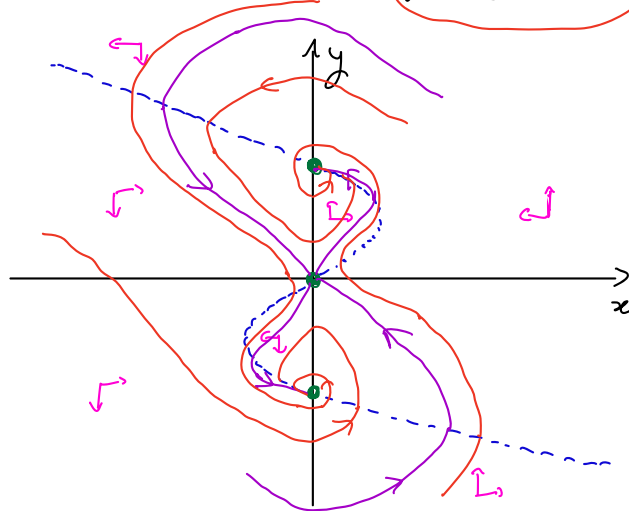
$$JS_{(x,y)}(F(x,y)) = (-y + y^3 + 2x, -\frac{\mu}{2}(x+x^3)) = F(S(x,y))$$

Ritratti di fase.

$$\mu \in (-1, 0)$$



$$\mu \in (0, 1)$$



Gli autovettori di $JF(P_2)$ e $JF(P_3)$ sono $v_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu}(-1 \pm \sqrt{1-\mu}) \\ 1 \end{pmatrix}$

Gli autovettori di $JF(P_2)$ sono $v_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu}(-1 \pm \sqrt{1+\mu/2}) \\ 1 \end{pmatrix}$

Poniamo ora $\mu=0$.

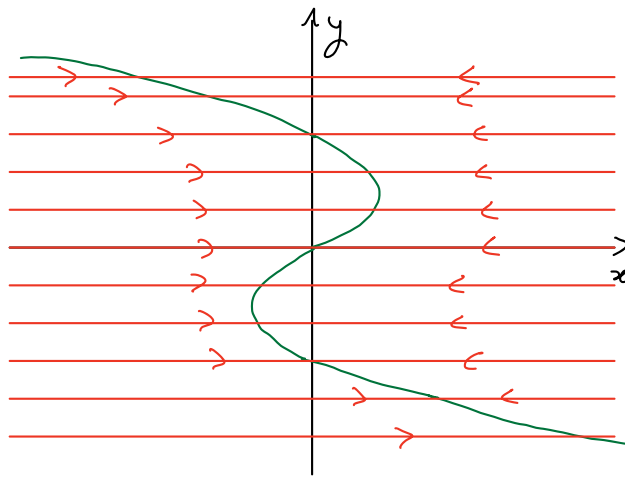
Troviamo i punti fissi del sistema. In questo caso sono fissi tutti i punti della curva

$$P = \{y - y^3 = 2x\}.$$

Rette invarianti. In questo caso sono invarianti tutte le rette $y=c$, $c \in \mathbb{R}$.

Orbite periodiche e simmetrie. Valgono gli stessi argomenti del caso $\mu \neq 0$.

Ritratto di fase.



ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1-x^2-y^2)y - x \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

(a)

Ponendo uguale a 0 il campo di vettori, dalla prima equazione si trova $y=0$.

Sostituendo nella seconda, troviamo che il sistema ammette un unico punto fisso

$$\underline{P = (0,0)}$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x - 1 & \mu(1-x^2) - 2\mu y^2 \end{pmatrix}$$

e quindi $JF(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$, $\det JF(P) = 1$, $\text{tr } JF(P) = \mu$, $\text{tr}^2 - 4 \det = \mu^2 - 4$.

- se $\mu < 0$, P è un punto fisso iperbolico stabile di tipo nodo se $\mu < -2$, di tipo nodo improprio se $\mu = -2$, di tipo fuoco se $\mu \in (-2, 0)$;
- se $\mu > 0$, P è un punto fisso iperbolico instabile di tipo nodo se $\mu > 2$, di tipo nodo improprio se $\mu = 2$, di tipo fuoco se $\mu \in (0, 2)$;
- se $\mu = 0$, P non è iperbolico ed è di tipo centro. Poiché in questo caso il sistema è hamiltoniano di tipo meccanico con $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$, ricaviamo che P rimane un centro, e quindi è stabile ma non asintoticamente stabile.

(b)

Abbiamo visto che per $\mu = 0$ il sistema è hamiltoniano e ha un centro in $P = (0,0)$,

quindi in questo caso esistono orbite periodiche intorno a P .

Poniamo ora $\mu > 0$ e proviamo ad applicare il Teorema di Poincaré-Bendixson. Ci chiediamo quindi se per $\mu > 0$ esiste $D \subset \mathbb{R}^2$ compatto non-voto e non contenente punti fissi per cui esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la cui orbita è asintoticamente contenuta in D .

Un modo per verificare le ipotesi del teorema è scrivere il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ) e cercare $D = \{(\rho, \vartheta) : \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1\}$ con $0 < \rho_0 < \rho_1$ in $\mathbb{R}^+$ e tale che $\dot{\rho}|_{\rho=\rho_0} \geq 0$, $\dot{\rho}|_{\rho=\rho_1} \leq 0$. Osserviamo che sappiamo già che il sistema non ha punti fissi oltre $P = (0, 0)$, dunque se $\rho_0 > 0$, D non contiene punti fissi.

Scriviamo

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} = \frac{1}{\rho} [xy + \mu(1-x^2-y^2)y^2 - xy] \Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} = \\ &= \mu \rho \sin^2 \vartheta (1 - \rho^2 - \rho^2 \sin^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Poiché $1 - 2\rho^2 \leq 1 - \rho^2 - \rho^2 \sin^2 \vartheta \leq 1 - \rho^2$, $\forall (\rho, \vartheta)$, ponendo $\rho_0 = \frac{1}{2}$, $\rho_1 = 1$, si ha $\dot{\rho}|_{\rho=\rho_0} \geq \mu \rho_0 \sin^2 \vartheta (1 - 2\rho_0^2) = \frac{\mu}{4} \sin^2 \vartheta \geq 0 \quad \forall \vartheta$, e $= 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \{0, \pi\}$

$\dot{\rho}|_{\rho=\rho_1} \leq \mu \rho_1 \sin^2 \vartheta (1 - \rho_1^2) = -\mu \sin^2 \vartheta \leq 0 \quad \forall \vartheta$, e $= 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \{0, \pi\}$.

Quindi le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixson sono rispettate, e quindi esiste un'orbita periodica in D .

Infine osserviamo che se $\mu < 0$, il sistema in coordinate polari avrà

$\dot{\rho} = -|\mu| \rho \sin^2 \vartheta (1 - \rho^2 - \rho^2 \sin^2 \vartheta)$. Quindi $(\tilde{\rho}(t), \tilde{\vartheta}(t)) = (\rho(-t), \vartheta(-t))$ soddisfa $\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\dot{\rho}(-t) = |\mu| \tilde{\rho} \sin^2 \tilde{\vartheta} (1 - \tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}^2 \sin^2 \tilde{\vartheta})$, ossia il comportamento è come quello del caso $\mu > 0$ con un'inversione temporale. Questo ci permette di dedurre che anche in questo caso esistono orbite periodiche in D .

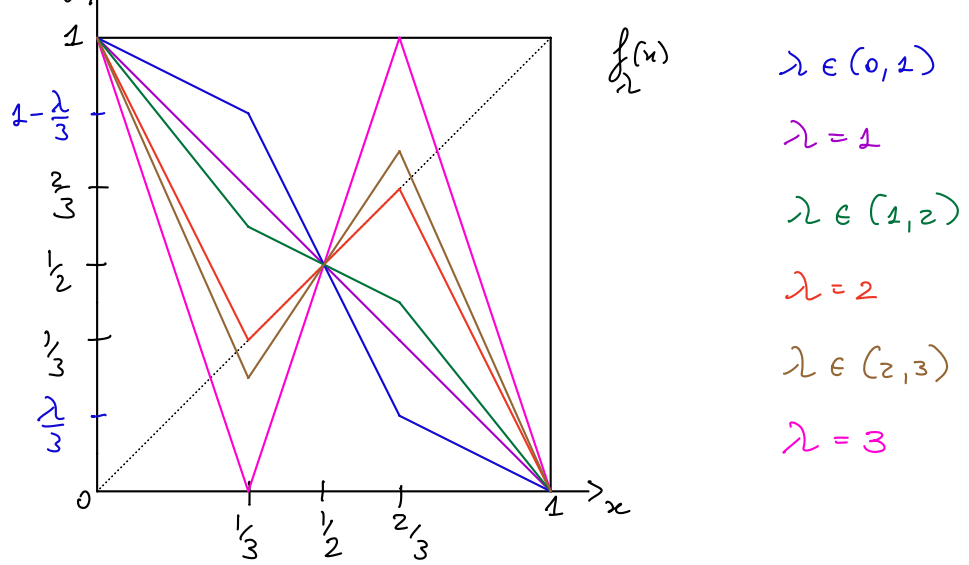
E S E R C I Z I O

3

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 - \lambda x, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{3}] \\ (2\lambda - 3)x + 2 - \lambda, & x \in J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \lambda(1 - x), & x \in J_3 = [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

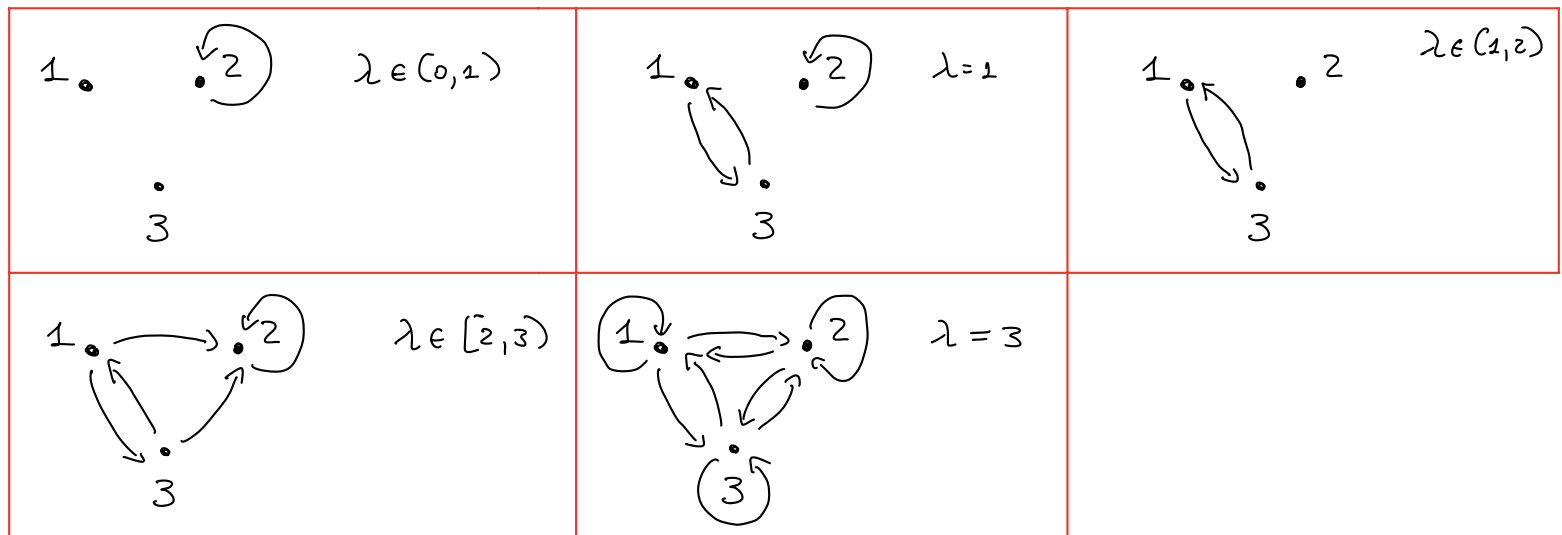
$$\lambda \in (0, 3]$$

71



(a) Per costruire l' f_λ -grafo di T usiamo i grafici di f_λ di sopra, e osserviamo che:

- $f_\lambda(J_1) = [1 - \frac{\lambda}{3}, 1] \supseteq J_3$ se $\lambda \geq 1$, $\supseteq J_2$ se $\lambda \geq 2$, $\supseteq J_1$ se $\lambda = 3$;
- $f_\lambda(J_2) = [\frac{\lambda}{3}, 1 - \frac{2\lambda}{3}] \supseteq J_2$ se $\lambda \in (0,1] \cup [2,3]$, $\supseteq J_1$ se $\lambda = 3$, $\supseteq J_3$ se $\lambda = 3$;
- $f_\lambda(J_3) = [0, \frac{\lambda}{3}] \supseteq J_1$ se $\lambda \geq 1$, $\supseteq J_2$ se $\lambda \geq 2$, $\supseteq J_3$ se $\lambda = 3$.



(b) Cerchiamo i punti fissi in J_1, J_2, J_3 .

In J_1 , un punto fisso è soluzione di $1 - \lambda x = x$ con $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Quindi troviamo

$$\underline{x_1 = \frac{1}{1+\lambda} \in J_1 \text{ per } \lambda \in [2,3]}, \text{ e } |f'_\lambda(x_1)| = |-\lambda| > 1 \text{ per } \lambda \in [2,3],$$

quindi x_1 è repulsivo quando esiste. Le stesse proprietà valgono per $x_3 = \lambda/(1+\lambda)$ in J_3

In J_2 , un punto fisso soddisfa $(2\lambda - 3)x + 2 - \lambda = x$ con $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Quindi troviamo

$$x_2 = \frac{x}{2} \in J_2 \quad \forall \lambda \in (0, 3] \quad \text{e} \quad \{x \in J_2\} \quad \text{per} \quad \lambda = 2.$$

$$\text{Poiché } |f'_2(x_2)| = |2\lambda - 3| > 1 \iff \lambda \in (0, 1) \cup (2, 3), \quad = 1 \iff \lambda \in \{1, 2\},$$

$$< 1 \iff \lambda \in (1, 2),$$

concludiamo che x_2 è repulsivo se $\lambda \in (0, 1) \cup (2, 3)$, attrattivo se $\lambda \in (1, 2)$, stabile ma non attrattivo se $\lambda \in \{1, 2\}$. I punti $\{x \in J_2\}$ nel caso $\lambda = 2$ sono stabili ma non attrattivi.

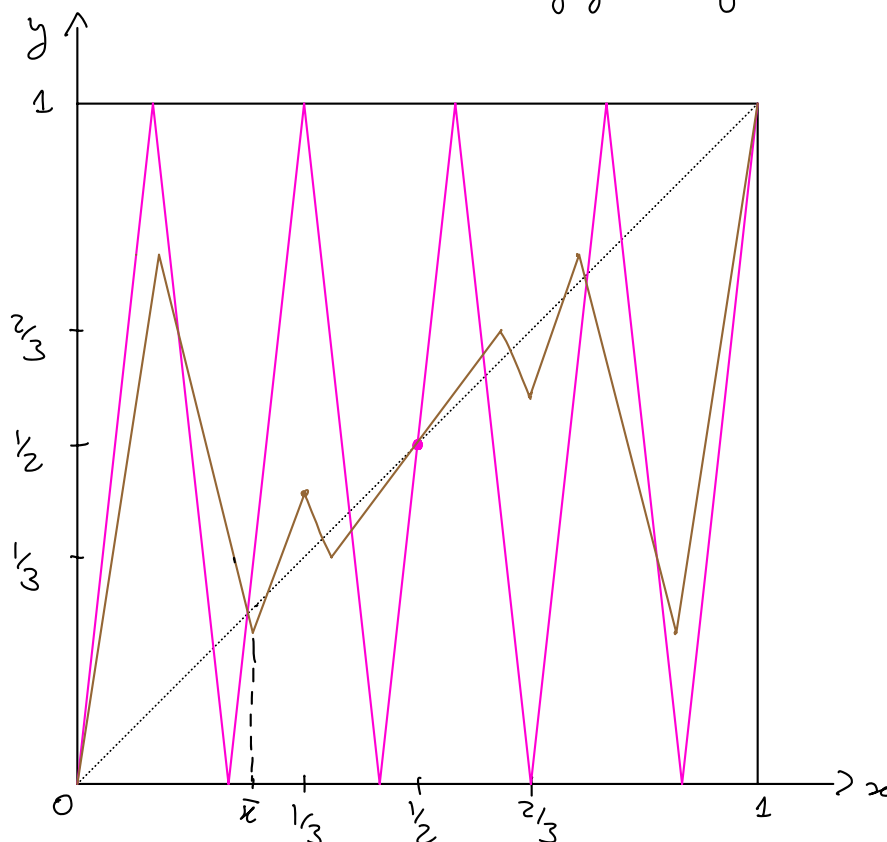
Considerando le orbite periodiche, notiamo che esiste un'orbita di periodo minimo e data da $\{0, 1\}$. Poiché $|f'_2(0) \cdot f'_2(1)| = \lambda^2 < 1 \iff \lambda \in (0, 1)$, otteniamo un'orbita attrattiva per $\lambda \in (0, 1)$.

Abbiamo visto che per $\lambda \in (1, 2)$ c'è un punto fisso attrattivo.

Se $\lambda \in (2, 3]$, si ha $|f'_2(x)| > 1 \quad \forall x$ in cui ha senso, quindi ogni orbita periodica è repulsiva.

Infine, se $\lambda = 1$, ogni punto è periodico di periodo minimo 2 e le orbite sono stabili ma non attrattive. Se $\lambda = 2$, $|f'_2(x)| > 1 \quad \forall x \notin J_2$, $|f'_2(x)| = 1 \quad \forall x \in J_2 = \{\text{punti fissi}\}$. Quindi non abbiamo orbite periodiche attrattive.

(c) Poniamo $\lambda \in (2, 3]$ e costruiamo il grafico di f^2 .



$$\lambda \in (2, 3)$$

$$\lambda = 3$$

Osserviamo che, chiamando $\bar{x} \in J_1$ il punto per cui $f_\lambda(\bar{x}) = \frac{1}{3}$, si ha $\bar{x} = \frac{2}{3\lambda}$ e
 $f_\lambda^2(\bar{x}) = f_\lambda(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{\lambda}{3} < \bar{x}$ e $f_\lambda^2(\frac{1}{3}) = f_\lambda(1 - \frac{\lambda}{3}) = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{3} > \frac{1}{3}$ se $\lambda > 2$.
 Quindi f_λ ammette orbite periodiche di periodo minimo 2 diverse da $\{0, 1\} \forall \lambda \in (2, 3]$.

Studiamo il comportamento caotico di f_λ . Se $\lambda = 3$, abbiamo $h_{\text{top}}(f_3) = \log 3$ quindi f_3 è caotica. Inoltre, usando il f_3 -grafo troviamo l'esistenza di un'orbita periodica di periodo minimo 3. Poiché questa condizione dipende con continuità da λ , e non siamo nel caso limite (basta considerare il grafico di f_3^3), esiste $\lambda_* \in (2, 3)$ tale che f_λ ha un'orbita periodica di periodo minimo 3, e quindi è caotica, $\forall \lambda \in [\lambda_*, 3]$.

Costruiamo ora un ferro di cavallo per f_λ^2 vicino $\bar{x}$. Sia $\bar{x} = \frac{1}{2\lambda}$, che soddisfa $f_\lambda(\bar{x}) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Allora: } f_\lambda^2 \Big|_{[\bar{x}, \bar{x})}^{(x)} = f_\lambda \Big|_{[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]}^{(1-\lambda x)} = (2\lambda-3)(1-\lambda x) + 2-\lambda = \lambda(3-2\lambda)x + \lambda-1,$$

$$f_\lambda^2 \Big|_{[\bar{x}, \frac{1}{3}]}^{(x)} = f_\lambda \Big|_{[0, \frac{1}{3}]}^{(1-\lambda x)} = 1 - \lambda(1-\lambda x) = 1 - \lambda + \lambda^2 x$$

Dunque f_λ^2 ha il punto fisso $x^* = \frac{1}{\lambda+1} \in [\bar{x}, \frac{1}{3}]$, e $y^* = \frac{\lambda^2-2}{\lambda(\lambda+1)(2\lambda-3)} \in [\bar{x}, \bar{x}]$
 verifica $f_\lambda^2(y^*) = x^*$.

$$\text{Infine, } f_\lambda^2(\bar{x}) = 1 - \frac{\lambda}{3} < y^* \iff H(\lambda) := 2\lambda^4 - 7\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 6 > 0.$$

Studiando $H(\lambda)$ su $(2, 3]$ troviamo $H(2) = 0$, $H'(\lambda) > 0$ su $(2, 3]$. Quindi

$f_\lambda^2(\bar{x}) < y^* \forall \lambda \in (2, 3]$, e dunque $J = [y^*, x^*]$ è un ferro di cavallo di f_λ^2
 $\forall \lambda \in (2, 3]$, e quindi f_λ è caotica $\forall \lambda \in (2, 3]$.