

Esercizi
Teoremi limite

1. Sia $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con $Y_k \sim N(0, 1)$ per ogni $k \geq 1$, e sia $\{X_k\}_{k \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti definite da $X_k = \frac{k+1}{k} Y_k + 1$, per ogni $k \geq 1$. (i) Determinare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

- (ii) Studiare il limite nel caso in cui $X_k = \frac{k+1}{k} Y_k + (-1)^k$, per ogni $k \geq 1$.

Risposte: (i) 0; (ii) 0.

2. Un giocatore di basket segna il 50% dei suoi tiri. In un campionato arriva a tirare 100 tiri. Stimare la probabilità che il giocatore segni: (i) meno di 70 canestri; (ii) almeno 65 canestri; (iii) tra 40 e 55 canestri.

Risposte: (i) 0.99997; (ii) 0.00135; (iii) 0.81859.

3. Supponiamo che il reddito mensile di una famiglia sia una variabile aleatoria con valore atteso 1200 euro e deviazione standard 200 euro. (i) Calcolare la probabilità che sommando i redditi mensili di un campione di 100 famiglie si raggiunga una cifra superiore o uguale a 122000 euro. (ii) Quanto deve essere numeroso un campione di famiglie affinché il reddito mensile medio del campione sia compreso tra 1150 euro e 1250 euro con probabilità maggiore o uguale di 0.999?

Risposte: (i) 0.15866; (ii) 174.

4. Sia $\{X_k\}_{k \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, dove X_k rappresenta il voto di uno studente nel compito di Statistica. Supponiamo che il valore atteso delle X_k sia 21 e la loro varianza sia 7. Supponendo che valga l'approssimazione del Teorema del Limite Centrale, quanti studenti devono fare un compito affinché con probabilità stimata maggiore o uguale a 0.99 la media aritmetica dei voti degli studenti sia tra il 19 e il 23?

Risposta: 12 studenti.

5. Supponiamo di avere un campione di 1000 assi di legno la cui lunghezza in centimetri sia data da una variabile aleatoria gaussiana $N(100, 1)$. (i) Qual è la probabilità che un asse di legno abbia lunghezza maggiore di 100.5 cm? (ii) Qual è la probabilità che nell'intero campione di assi ci siano al più 300 assi di lunghezza maggiore di 100.5 cm?

Risposte: (i) 0.30854; (ii) 0.28.