

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 21-07-2022

Esercizio 1. (12 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - y) - \mu \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, 2)$.

- (a) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu = 0$.
- (b) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu \in (0, 2)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y - x\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\mu}{4} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = 2x + 2y - y\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\mu}{4} \frac{x y^2}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

- (a) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu = 0$.
- (b) Discutere l'esistenza di orbite periodiche nel caso $\mu > 0$.

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue

$$f_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad f_\lambda(x) = \lambda - (\lambda + 1)x^2$$

per $\lambda \in [-1, 1]$.

- (a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi di f_λ .
- (b) Dire se esiste $\bar{\lambda} \in [-1, 1]$ tale che la mappa f_λ è caotica per $\lambda \geq \bar{\lambda}$.
- (c) Mostrare che la funzione $\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $\varphi(t) = 2t - 1$, rende la mappa f_λ coniugata con una mappa della famiglia logistica.

ES. 1
$$\begin{cases} \dot{x} = x(2-y) - \mu \\ \dot{y} = y(x-1) \end{cases}, \mu \in [0, 2)$$

(a) Caso $\mu = 0$.

Punti fissi Le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x(2-y) = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$$

sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (1, 2)$.

Si ha $JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$ e quindi

$JF(P_1) = JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, che ha autovalori $\lambda_1 = -1$ con

autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\lambda_2 = 2$ con autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quindi P_1 è un punto iperbolico di tipo sella.

$JF(P_2) = JF(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, che verifica $\text{tr} = 0$, $\det = 2 > 0$,

quindi P_2 è un punto non iperbolico di tipo centro.

Linee invarianti Dalla forma del sistema segue che gli assi sono invarianti, infatti se

• $I_1(x, y) = x$, si ha $\dot{I}_1|_{I_1=0} = x(2-y)|_{x=0} \equiv 0$ e

• $I_2(x, y) = y$, si ha $\dot{I}_2|_{I_2=0} = y(x-1)|_{y=0} \equiv 0$.

Possiamo inoltre applicare il metodo delle isocline. Scrivendo

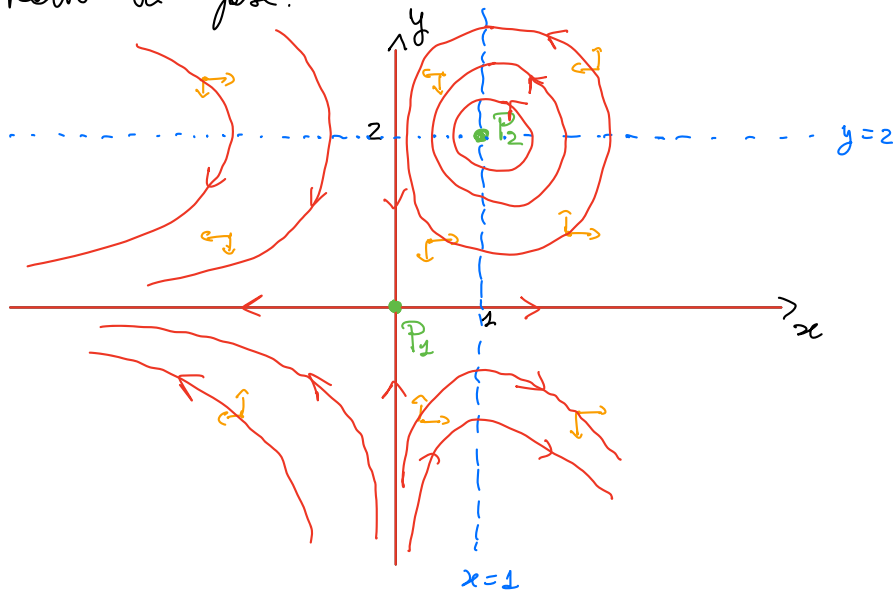
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(2-y)}$$
 e risolvendo l'equazione differenziale ponendo

$$\int \frac{2-y}{y} dy = \int \frac{x-1}{x} dx, \text{ otteniamo che la funzione}$$

- $I_3(x, y) = 2 \log |y| + \log |x| - y - x$ è un integrale primo.

Possiamo quindi ottenere le orbite come curve di livello della funzione I_3 , che non sono di facile rappresentazione. Possiamo però usare il fatto che I_3 ha un integrale primo per ottenere l'esistenza di orbite periodiche intorno al punto $P_2 = (1, 2)$. Si verifica infatti che I_3 ha un punto di massimo locale in P_2 , e dunque le sue curve di livello saranno chiuse in un intorno del punto.

Ritratto di fase Utilizzando il segno del campo possiamo disegnare il ritratto di fase.



(b) Caso $\mu \in (0, 2)$

Punti fissi Dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} x(2-y) = \mu \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$, che ha soluzioni $P_1 = \left(\frac{\mu}{2}, 0\right)$ e $P_2 = (1, 2-\mu)$.

$$2v_1 - \frac{\mu}{2}v_2 = \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)v_2 \quad v_1 = \frac{\mu-1}{2}v_2$$

Si ha ancora $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$ e quindi

$JF(P_1) = JF\left(\frac{\mu}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\mu}{2}-1 \end{pmatrix}$, che ha autovalori $\lambda_1 = \frac{\mu}{2}-1 < 0$ con

autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\lambda_2 = 2$ con autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dunque P_1 è un punto iperbolico di tipo sella.

$JF(P_2) = JF(1, 2-\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 2-\mu & 0 \end{pmatrix}$, che verifica $\text{tr} = \mu > 0$ e

$\det = 2-\mu > 0$. In particolare P_2 è un punto iperbolico, ed

è di tipo fucoco instabile se $\text{tr}^2 - 4\det < 0 \Leftrightarrow$

$$\mu^2 + 4\mu - 8 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (0, 2(\sqrt{3}-1))$$

è di tipo node improprio instabile se $\text{tr}^2 - 4\det = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mu = 2(\sqrt{3}-1)$$

è di tipo node stabile se $\text{tr}^2 - 4\det > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mu \in (2(\sqrt{3}-1), 2).$$

Invarianti Come nel caso $\mu=0$, si verifica che l'asse x è invariante.

Non ci sono altri invarianti facili da identificare.

Orbite periodiche Per la teoria dell'indice di Poincaré,

le orbite periodiche si potrebbero trovare solo intorno al

punto P_2 . Inoltre, poiché l'asse x è invariante e

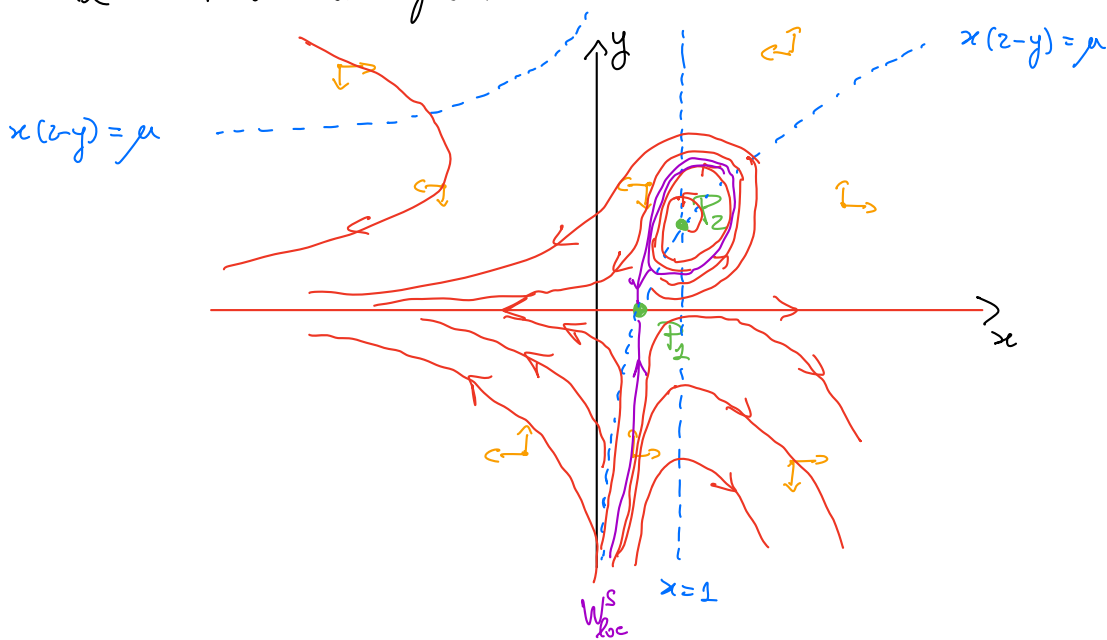
il campo $F(x,y)$ verifica $F(0,y) = \begin{pmatrix} -\mu \\ -y \end{pmatrix}$ (quindi sull'asse y

il campo punta sempre nella direzione del semipiano $\{x < 0\}$,
 le orbite periodiche potrebbero trovarsi solo nell'insieme
 semplicemente connesso $U = \{x > 0, y > 0\}$.

Sia allora $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\rho(x,y) = \frac{1}{xy}$. Si ha
 $\operatorname{div}(\rho F) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2-y}{y} - \frac{\mu}{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x-1}{x} \right] = \frac{\mu}{x^2 y} > 0$ su U .

Quindi per il Teorema di Bendixon-Dulac, non esistono
orbite periodiche.

Ritratto di fase Utilizzando il segno del campo vettoriale disegnarne
 il ritratto di fase.



Questo è il caso $\mu \in (0, 2(\sqrt{3}-1))$. Negli altri casi cambia il
 ritratto in un intorno di P_2 .

ES. 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y - x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\mu}{4} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \\ \dot{y} = 2x + 2y - y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\mu}{4} \frac{x y^2}{x^2+y^2} \end{cases}, \mu \geq 0$$

(a) Caso $\mu=0$

Riscriviamo il sistema utilizzando le coordinate polari (ρ, ϑ) date da $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$. Si ottiene che

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x \dot{x} + y \dot{y}) \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2} (x \dot{y} - y \dot{x}) \end{cases}$$

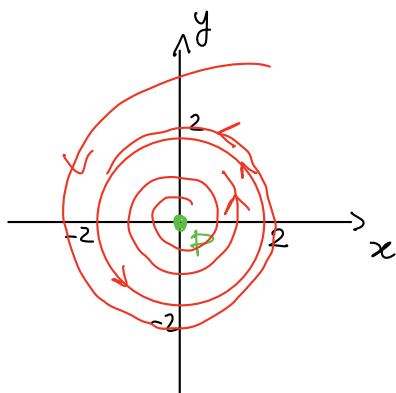
Quindi

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{\rho} \left[2x^2 - 2xy - x^2 \sqrt{x^2+y^2} + 2xy + 2y^2 - y^2 \sqrt{x^2+y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho} (2\rho^2 - \rho^3) = 2\rho - \rho^2 = \rho(2-\rho) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{1}{\rho^2} \left[2x^2 + 2xy - xy \sqrt{x^2+y^2} - 2xy + 2y^2 + xy \sqrt{x^2+y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho^2} (2\rho^2) = 2 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi il sistema $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(2-\rho) \\ \dot{\vartheta} = 2 \end{cases}$ da cui si deduce

l'esistenza di un'orbita periodica data da $\{x^2+y^2=4\}$ e dell'unico punto fisso $P=(0,0)$, che è un fuoco instabile.



(b) Caso $\mu > 0$

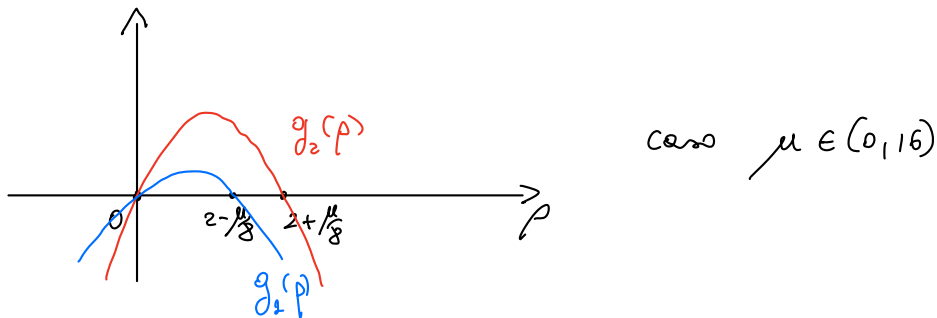
Utilizziamo ancora le coordinate polari, aggiungendo

il termine che dipende da μ . Quindi:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(2-\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\mu}{4} \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} = \rho(2-\rho) + \frac{\mu}{4\rho} xy = \rho(2-\rho) + \frac{\mu}{8} \rho \sin(2\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = 2 + \frac{1}{\rho^2} \frac{\mu}{4} \left(\frac{x^2y^2 - x^2y^2}{x^2+y^2} \right) = 2 \end{cases}$$

Poiché $\sin(2\vartheta) \in [-1, 1] \quad \forall \vartheta$, possiamo scrivere che

$$g_1(\rho) := \left(2 - \frac{\mu}{8}\right)\rho - \rho^2 \leq \dot{\rho} \leq \left(2 + \frac{\mu}{8}\right)\rho - \rho^2 =: g_2(\rho)$$



da cui si ricava che se $\mu \in (0, 16)$, $\exists \rho_1 < 2 - \frac{\mu}{8}$ tale che

$$\dot{\rho}|_{\{\rho=\rho_1\}} > 0 \quad \forall \vartheta, \quad \text{ed} \quad \exists \rho_2 > 2 + \frac{\mu}{8} \quad \text{tale che} \quad \dot{\rho}|_{\{\rho=\rho_2\}} < 0 \quad \forall \vartheta.$$

Di conseguenza possiamo applicare il Teorema di Poincaré - Bendixson all'insieme $D = \{\rho_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq \rho_2^2\}$, che non contiene punti fissi.

Quindi esiste un'orbita periodica per $\mu \in (0, 16)$.

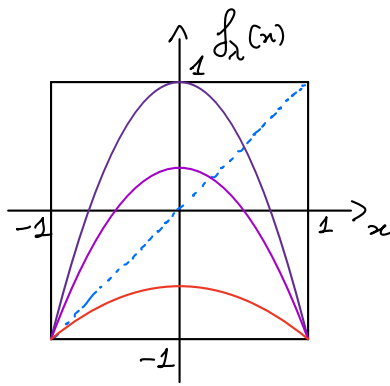
Per $\mu \geq 16$ la stima che abbiamo usato non è sufficiente per concludere.

L'intuizione indica che l'orbita periodica esiste $\forall \mu > 0$, ma non è facile dimostrarlo.

ES. 3

$$f_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad f_\lambda(x) = \lambda - (\lambda + 1)x^2$$

con $\lambda \in [-1, 1]$



$$\lambda = 1$$

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\lambda \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

(a) Il punto $\boxed{P_1 = -1}$ è un punto fisso $\forall \lambda \in [-1, 1]$.

Poiché $f'_\lambda(P_1) = -2(\lambda+1)x \Big|_{x=-1} = 2(\lambda+1)$ si ha

- se $\lambda \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right)$, $|f'_\lambda(P_1)| < 1$ e P_1 è attrattivo;
- se $\lambda = -\frac{1}{2}$, $f'_\lambda(P_1) = 1$ e $f''_\lambda(P_1) = -1 < 0$, quindi P_1 è attrattivo da destra, in questo caso attrattivo perché l'intorno sinistro non ci interessa;
- se $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'_\lambda(P_1)| > 1$ e P_1 è repulsivo.

Altri punti fissi si ottengono come soluzioni in $(-1, 1)$ di

$$f_\lambda(x) = x \iff \lambda - (\lambda+1)x^2 = x \iff x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2\lambda+1)^2}}{2(\lambda+1)}$$

$$\iff x \in \left\{ -1, \frac{\lambda}{\lambda+1} \right\}$$

Poiché $\frac{\lambda}{\lambda+1} \in (-1, 1)$ per $\lambda \in [-1, 1] \iff \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$, abbiamo

che esiste $\boxed{P_2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}}$ punto fisso se $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Poiché $f'_\lambda(P_2) = -2(\lambda+1)x \Big|_{x=\frac{\lambda}{\lambda+1}} = -2\lambda$, si ha

- se $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $|f'_\lambda(P_2)| < 1$ e P_2 è attrattivo;
- se $\lambda = \frac{1}{2}$, $f'_\lambda(P_2) = -1$ e

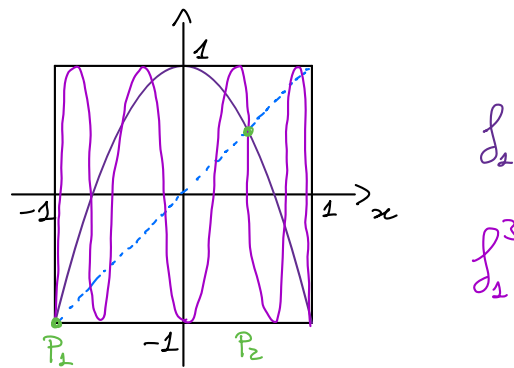
$$S f_{\frac{1}{2}}(P_2) = \frac{f_{\frac{1}{2}}'''(P_2)}{f_{\frac{1}{2}}'(P_2)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f_{\frac{1}{2}}''(P_2)}{f_{\frac{1}{2}}'(P_2)} \right)^2 = -\frac{3}{2} (\lambda+1)^2 \Big|_{\lambda=\frac{1}{2}} = -\frac{27}{8} < 0$$

e quindi P_2 è attrattivo;

• se $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$, $|f_{\lambda}'(P_2)| > 1$ e P_2 è repulsivo.

(b) Uno dei criteri per dimostrare che f_{λ} è caotica è mostrare che esiste un'orbita periodica di periodo minimo non potenza di 2. Studiamo quindi l'esistenza di un'orbita periodica di periodo minimo 3.

Se $\lambda=1$, sappiamo che f_{λ} e f_{λ}^3 hanno i seguenti grafici



quindi f_{λ} ha due orbite periodiche di periodo 3.

Per continuità, se λ decresce, il grafico di f_{λ}^3 continuerà ad intersecare la bisettrice per tutti i $\lambda \geq \bar{\lambda} \in (-1, 1)$, in punti diversi dai punti fissi P_1 e P_2 , quindi per questi valori di λ la mappa f_{λ} sarà caotica.

Si può ottenere questo valore di $\bar{\lambda}$ cercando condizioni affinché l'equazione $f_{\lambda}^3(x) = x$ abbia soluzioni in $[-1, 1]$ diverse da -1 e $\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

(c) Basta scrivere l'espressione per $(\varphi^{-1} \circ f_{\lambda} \circ \varphi)(t)$. Poiché

$\varphi(t) = 2t - 1$, e $\varphi^{-1}(s) = \frac{s+1}{2}$, scriviamo

$$\frac{1}{2} \left(1 + \int_{\partial \mathbb{D}} (2t-1) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda - (\lambda+1)(2t-1)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \lambda - (\lambda+1)(4t^2 - 4t) - (\lambda+1) \right) = 2(\lambda+1)t(1-t), \text{ che}$$

è la mappa della famiglia logistica $g_{\mu}(t) = \mu t(1-t)$ con $\mu = 2(\lambda+1)$.