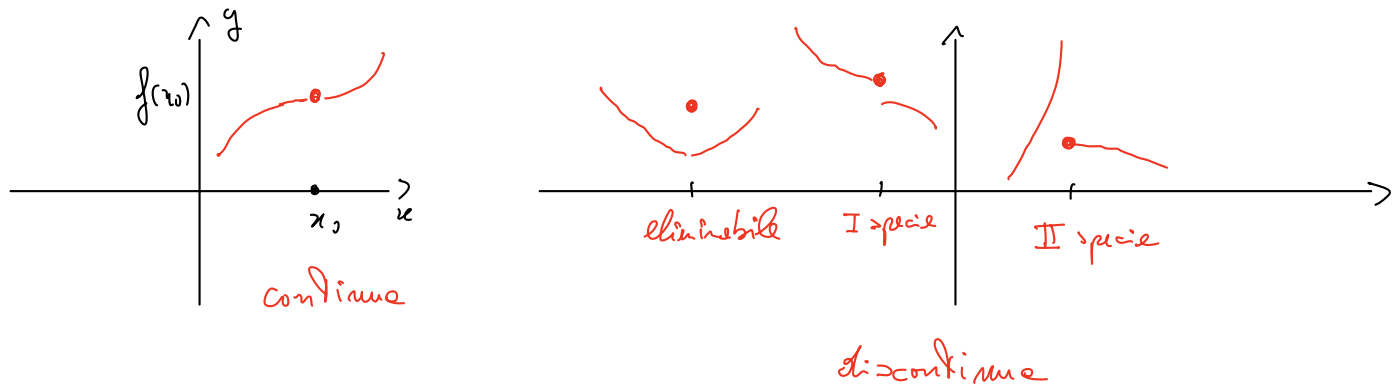


Continuità

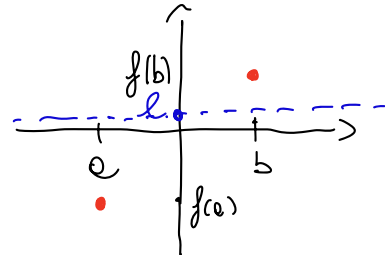
$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, D dominio naturale

Se $x_0 \in D$, f è continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Teorema Se $x_0 \in D$, se f è continua in x_0 allora:

- (permanenza del segno) se $f(x_0) > 0$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$;
- (valori intermedi) se inoltre f è continua in tutti i punti di un intervallo $[a, b]$ che contiene x_0 , allora $\forall l \in [f(a), f(b)]$ oppure $l \in [f(b), f(a)]$, con $f(a) \neq f(b)$, esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = l$.



Teorema di Weierstrass Se $D = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato,

se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$, allora assume massimo e minimo, ossia $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) = \max_{[a, b]} f, \quad f(x_2) = \min_{[a, b]} f$$

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \leq f(x_1), f(x) \geq f(x_2))$$

Derivabilità

Def Sia D dominio di f , $x_0 \in D$ si dice interno a D se $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset D$.

Def Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno, si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il

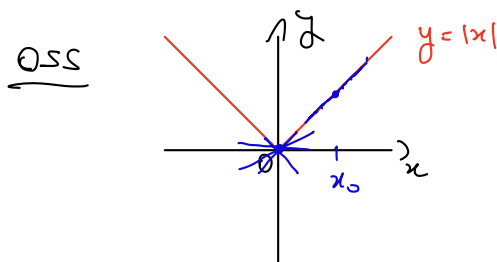
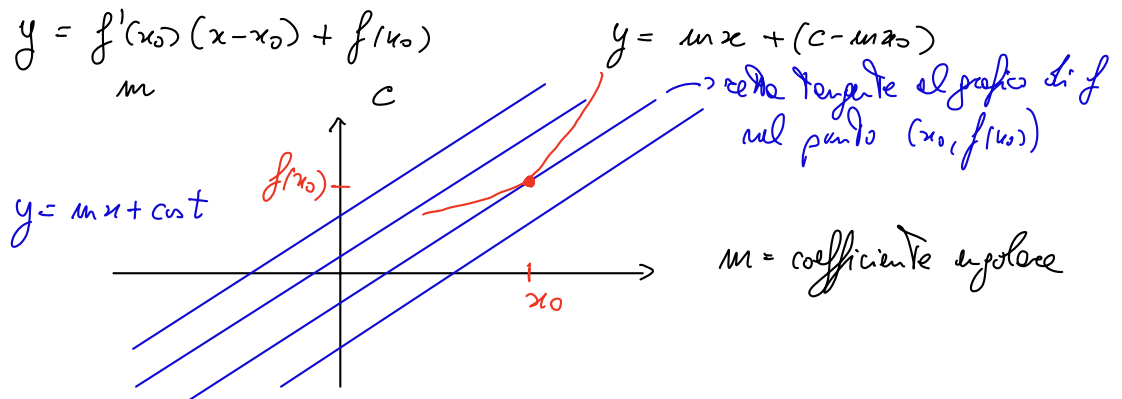
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{rapporto incrementale})$$

che si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

(limite esiste finito $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)

oss $f'(x_0)$ esiste $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$



$f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$\neq$

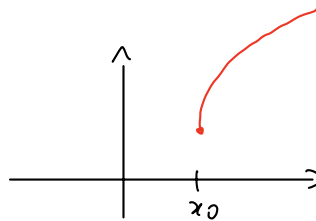
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Se $x_0 > 0$, $f'(x_0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

Se $x_0 < 0$, $f'(x_0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1$

$|x|$ ha uno zero in 0

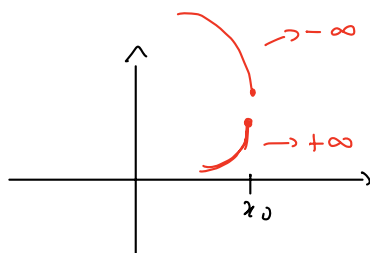
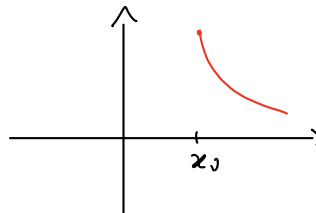
oss $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$



ES $f(x) = \sqrt{|x|}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$



Funzioni elementari

Potenze, funzioni Trigonometriche, esponenziali e logaritmici sono funzioni derivabili in ogni punto interno del loro dominio naturale.

oss $\sqrt{x}$ non è derivabile in 0, $D = [0, +\infty)$

Prop Se f e g sono funzioni derivabili, lo sono anche $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ nei punti interni del loro dominio.

ES

$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}, D = \mathbb{R}$

f è continua in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché sono continue $\sin x$ e x^2 ;

in 0 perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$, e quindi

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$).

oss $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$, allora $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
 $(f(x) = x, f'(x) = 1)$

$$f(x) = 1, \text{ allora } f'(x) = 0$$

$$\underline{\text{oss}} \quad f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

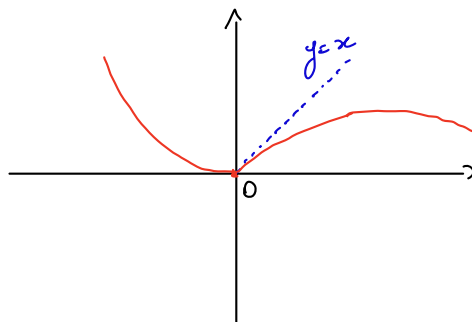
f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché $\sin x$ e x^2 sono derivabili

f è derivabile in 0? È finito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$? No

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x)$$

≠

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \quad (= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x)$$



$$\underline{\text{oss}} \quad f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\underline{\text{oss}} \quad (f+g)' = f' + g' \quad , \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$c \in \mathbb{R} \quad , \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

$$\underline{\text{ES}} \quad f(x) = e^x + e^{-x} \quad , \quad f'(x) = (e^x)' + (e^{-x})' = e^x + \left(\frac{1}{e^x}\right)' = e^x + \left(-\frac{e^x}{e^{2x}}\right) = e^x - e^{-x}$$

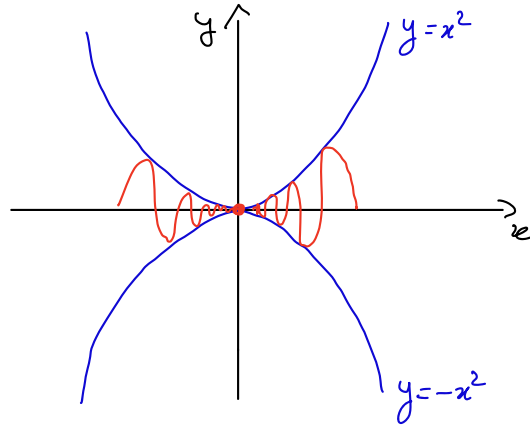
$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$e^{-x} = (g \circ h)(x) \quad , \quad g(x) = e^x \quad , \quad h(x) = -x \quad , \quad g'(x) = e^x \quad , \quad h'(x) = -1$$

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) h'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

ES

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad , \quad f \text{ is continuous in } \mathbb{R}.$$



$$x \neq 0 \quad , \quad f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = (x^2)' \left(\sin\frac{1}{x} \right) + x^2 \left(\sin\frac{1}{x} \right)' =$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \quad \text{non esiste}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$