

- Sistemi lineari di m equazioni in n variabili

A matrice dei
coefficienti
 $M(m \times n)$

$\underline{b}$ vettore dei
termini noti
 $\mathbb{R}^m$

$$\rightarrow C = (A|b) \\ M(m \times (n+1))$$

- $A \underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in M(m \times n)$

Prodotto di una matrice $M(m \times n)$ e un vettore in $\mathbb{R}^n$ il cui risultato è un vettore in $\mathbb{R}^m$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^m \ni A \underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

ES $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \ni A \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-13) + (-1) \cdot 8 + 2 \cdot 7 \\ 1 \cdot (-13) + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \\ 2 \cdot (-13) + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ES $A \in M(2 \times 3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni A \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} \text{ è una soluzione di } \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Per avere tutte le soluzioni: } C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow 2C_1 + C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{2} C_1, \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{2} C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = -4 \end{cases} \quad z = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda \\ y = \frac{3}{2}\lambda - 4 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def Dati $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si definisce prodotto scalare
l'operazione $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$, $\underline{x} \cdot \underline{y}$ che restituisce
un numero reale dato da

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad \text{dove} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ES $A \in \mathbb{M}(1 \times 2) \quad A = (2 \quad -3)$

Soluzioni di $A \underline{x} = \underline{0} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$C = (2 \quad -3 \mid 0) \quad , \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{2} C_2 \quad C = (\textcircled{1} \quad -\frac{3}{2} \mid 0)$$

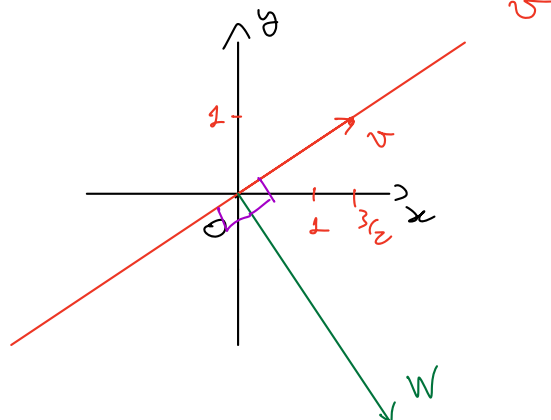
$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \underline{x} = 2x - 3y = 0$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{w} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x - 3y$$



$$\underline{ES} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \quad \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soluzioni} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underline{w}_1 \cdot \underline{x} = 0, \quad \underline{w}_2 \cdot \underline{x} = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_1 \cdot \underline{x} = 0 \\ \underline{w}_2 \cdot \underline{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot x + 0 \cdot y + (-3) \cdot z = 0 \end{cases}$$

Domanda : Trovare i vettori in $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$.

Solgo: Risolvere $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$

Def Dati $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, un' applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

è una funzione che ad ogni vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ associa uno, ed uno solo, vettore $L(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$, e ha le proprietà:

(i) $L(\underline{0}) = \underline{0}$;

(ii) $L(\underline{x} + \underline{y}) = L(\underline{x}) + L(\underline{y}) \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(iii) $L(\lambda \underline{x}) = \lambda L(\underline{x}) \quad , \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Prop Data $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, l'operazione

$$\mathbb{R}^n \ni \underline{x} \longmapsto A \underline{x} \in \mathbb{R}^m \quad \text{è un' applicazione lineare.}$$

Prop Un sistema lineare $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \underline{x} = \underline{b}$,
ha soluzione se e solo se $\underline{b} \in \text{Im}(A)$, $\text{Im}(A)$
dove $\text{Im}(A) := \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } A \underline{x} = \underline{y} \}.$

Quindi un sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

$A\underline{x} = \underline{0}$ ha almeno una soluzione se $\underline{0} \in \text{Im}(A)$, ed essendo A un'applic. lineare $A\underline{0} = \underline{0}$.

OSS $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3), \quad A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \supseteq \text{Im} A = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots)$$

$$\text{Base canonica di } \mathbb{R}^3 = \left\{ \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A^1$$

$$A\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A^3$$

$$\text{Im} A = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

A^1, A^2, A^3

$$\mathbb{R}^2 \ni \underline{b} \in \text{Im} A \iff \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\iff \exists \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x - y + 2z = b_1 \\ 0 \cdot x + y - z = b_2 \end{cases}$$

$$\iff \exists \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underline{b} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Prop Dato $A \in M(m \times n)$, il sottospazio vettoriale

$\text{Imm}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ si scrive come

$$\text{Imm}(A) = \text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$$

colonne di A

Def Si chiama RANGO di $A \in M(m \times n)$ il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

oss $\text{rank}(A) \leq n$, $\text{rank}(A) \leq m$.

Prop $\text{rank}(A) = \dim(\text{Imm } A)$.

ES $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\cdot \text{Imm } A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cdot A^1, A^2$ sono lin. indipendenti ($\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $A^1 \cdot \lambda = A^2$)

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\cdot \text{rank}(A) \leq 3$, $\text{rank}(A) \leq 2$

$\cdot \text{rank}(A) = 2 = \dim(\text{Imm } A)$

$\Rightarrow \text{Imm } A = \mathbb{R}^2$ se e solo se $A\underline{x} = \underline{b}$ ha almeno una soluzione

$\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^2$

TEOREMA Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ ha almeno una soluzione se e solo se

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | \underline{b})$$

C matrice completa

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$?

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1, 2, 3 1, 2, 3

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & k & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow 2C_3 - C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2k-4 & -1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow 2C_3 - C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4k-4 & -1 \end{array} \right)$$

$$(k=1)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$\nexists$ soluzioni

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ 2y - 4z = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Esercizio Dimostrare che per $k=1$, $\text{rank } A=2$, $\text{rank } C=3$.

$k \neq 1$ Esercizio Trovare le soluzioni