

Teorema Dato uno sp. vettoriale V , e due sottosp. vett. $U, W \subset V$ vale che

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

ES $\mathbb{R}^3$, $\dim U = \dim W = 2$. Se $\dim(U + W) = 3 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$
 . Se $\dim(U + W) = 2 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 2$

$\mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 1$

$$\dim(U + W) \quad \dim(U \cap W)$$

$$3 + 0 = 3, \quad U \cap W = \{0\}$$

$$2 + 1 = 3, \quad W \subset U$$

NO

1	2
0	3

Risoluzione di sistemi lineari

Sistemi lineari di m equazioni lineari in n variabili.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice dei
coefficienti

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{termini noti}$$

Il sistema è omogeneo se $b_1 = \dots = b_m = 0$. Altrimenti si dice non-omogeneo.

matrice
completa

$$C = (A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \mid \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right)$$

ES

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2 \times 3)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{M}(2 \times 4)$$

Moore di Gauss: (i) scambiare due righe di C

ES

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ii) moltiplicare una riga di C per $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

ES $\lambda = -2$,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2(x + y - z) = -2 \cdot 0 \end{cases}$$

(iii) sostituire una riga C_i con $C_i + \lambda C_j$

ES $C_2 \rightarrow C_2 + 2C_1$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{cases}$$

Prop Le mosse di Gauss non cambiano l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Algoritmo di Gauss-Jordan

Def Per una matrice C , si chiama pivot di una riga C_i il "primo" termine diverso da 0 in C_i .

ES $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ Il pivot di C_1 è 1
 " " " C_2 è -4.

Def Una matrice C si dice "a scolini" se il pivot di una riga è strettamente più a destra del pivot della riga precedente.

ES $C = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$ non è a scolini

$C = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è a scolini

Poss 1 Usare le mosse di Gauss per ridurre C a una matrice a scolini

Poss 2 Usare le mosse di Gauss (ii) e (iii) per far sì che:

- sopra ogni pivot ci siano solo 0.
- ogni pivot sia uguale a 1.

ES $C = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{-4} & 6 & 0 \end{array} \right)$ a scolini

$$C_1 \rightarrow -4C_2 + C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow -\frac{1}{4} C_2, \quad C_2 \rightarrow -\frac{1}{4} C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

Passo 3 Sostituire alle variabili x_i che corrispondono a colonne senza pivot degli scalari λ_i .

$$\text{ES} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ le soluzioni sono } \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Esercizi

$$1) \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y \rightarrow \lambda_1 \\ z \rightarrow \lambda_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, sottosp. di $\mathbb{R}^3$
di dim 2.

$$2) \quad \begin{cases} x - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$(iii) \quad C_2 \rightarrow C_2 - C_1$$

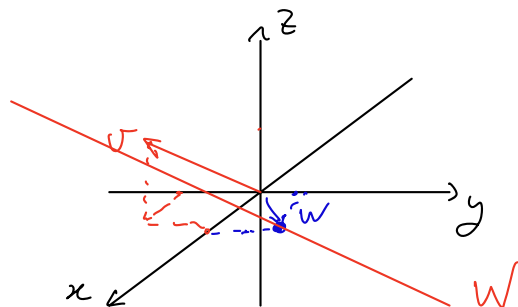
$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{2} C_2$$

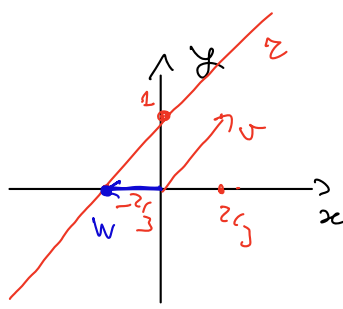
$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 1/2 \end{cases} \quad z = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \lambda = 1 \\ y + \lambda = 1/2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1/2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{w}$$



$$3) \quad y = \frac{3}{2}x + 1$$



$$v = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ -\frac{3}{2}x + y = 1 \right. \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(1 \times 2) \quad \underline{b} = (1)$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad C_1 \rightarrow -\frac{2}{3} C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{2}{3}y = -\frac{2}{3} \\ y = \lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{2}{3}\lambda = -\frac{2}{3} \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3} \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{w}$ $\underline{v}$

$$4) \quad \begin{cases} -y + 2z = 6 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$[A \quad \underline{x} = \underline{b}]$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$(i) \quad \text{Scambiare } C_1 \text{ e } C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

$$(iv) \quad C_2 \rightarrow 2C_2 - C_1 \quad \left(C_2 \rightarrow C_2 - \frac{1}{2}C_1 \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

$$(ivi) \quad C_3 \rightarrow 2C_3 + C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array} \right)$$

oss Se un pivot
è in b, il
sistema non ha soluzioni

$$(ivi) \quad C_1 \rightarrow C_1 - C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array} \right)$$

$$(iii) \quad C_1 \rightarrow \frac{3}{2}C_1 - C_3, \quad C_2 \rightarrow 3C_2 + C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -39 \\ 0 & 6 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad C_1 \rightarrow \frac{1}{3}C_1, \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{6}C_2, \quad C_3 \rightarrow \frac{1}{3}C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -13 \\ y = 8 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$\text{La soluzione è } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$