Def V sp. vettoriale, $(V,+)$ e molt. per scalare $\mathbb{R}$

$W \subset V$ sottosp. vettoriale,

ES
- Sottospazi di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
- Matrici $M(m\times n, \mathbb{R})$
- Combinazioni lineari, $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$
- Soluzioni di sistemi lineari omogenei

Def Siano $v_1, \dots, v_k \in V$. Si dicono <u>linearmente dipendenti</u> se $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$

e $v_i \neq \underline{0}\ \ \forall i$.

OSS

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \underline{0}\ ,\quad \lambda_1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

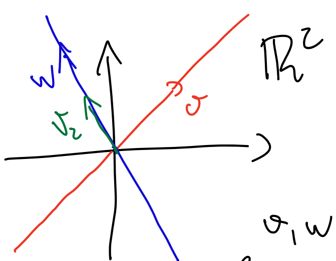
$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3$$

ES v_1, v_2 sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $v_1 = \lambda v_2$

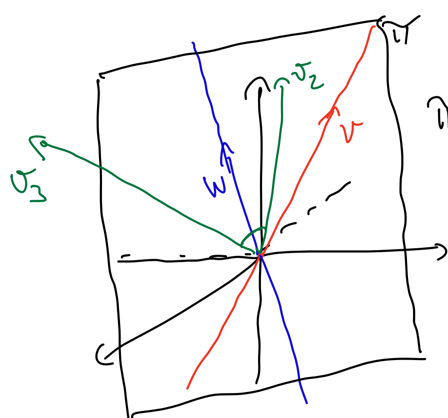
Def $v_1, \dots, v_k \in V$, con $v_i \neq \underline{0}\ \forall i$, si dicono <u>linearmente indipendenti</u> (se non sono linearmente dipendenti) se

scelti $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ per cui $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

ES



v, w sono lin. indip.



$\pi = \mathrm{Span}(v, w)$

v, w sono lin. indip.

v_2, w sono lin. dip.

$v_2 \in \tilde{u}$, allora v, v_2, w sono lin. dip

$v_3 \notin \pi$, allora v, v_3, w sono lin. indip

Def Uno spazio vettoriale V ha dimensione $d \in \mathbb{N}_0$ se V può essere scritto come combinazione lineare di d vettori e posso trovare in V d vettori linearmente indipendenti.

ES

- $\mathbb{R}^1$ ha dimensione 1.
- $\mathbb{R}^2$ " " 2. $\quad \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$
  - $\mathbb{R}^2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

    $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.

    $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 \\ 1 = \lambda \cdot 0 \end{cases} \quad \nexists \text{ soluzioni}$$

- Una retta in $\mathbb{R}^2$ che passa per $\underline{0}$ è un sottosp. vett di dimensione 1.

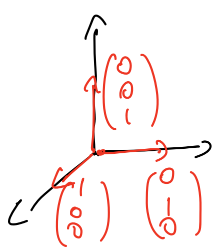
  $$W = \text{Span}(v), \quad v \neq \underline{0}$$

- $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.

  $$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.



Scegliamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{allora}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Def Si chiama base di uno spazio vettoriale V di dimensione d, un insieme di d vettori in V linearmente indipendenti. (e che generano V).

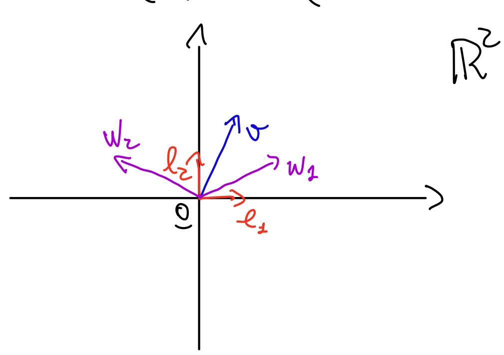
ES $\mathbb{R}^2$, base canonica $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$, " " $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Def Sia $v_1, \dots, v_d$ una base di V sp. vett. (di dimensione d)
Preso $w \in V$, si chiamano coordinate di w rispetto alla base $v_1 \dots v_d$, i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ per cui

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_d v_d.$$

ES $\mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2 e_2$ base canonica



w_1, w_2 è una base di $\mathbb{R}^2$. Quindi $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = v$

$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2(2-\lambda_2) - 2\lambda_2 \\ \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 4\lambda_2 \\ \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 3/4 \\ \lambda_1 = 5/4 \end{cases}$$

$$v = \frac{5}{4} w_1 + \frac{3}{4} w_2 \qquad \boxed{v = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}_{(w_1, w_2)}}$$

<u>OSS</u>

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{corretto}$$

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{sbagliato}$$

Verificare che $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ siano lin. indip.

[ossia scelti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{0}$
allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$]

<u>ES</u> $\mathcal{M}(2\times 2, \mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ matrici quadrate $\left(\mathcal{M}(m\times n) \text{ con } m = n\right)$

<u>PROP</u> $\dim \mathcal{M}(m \times n) = m \cdot n$

Base di $\mathcal{M}(2\times 2) = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

Se $\lambda_1 \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&\lambda_2\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\\lambda_3&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Def Dato uno sp. vett. V, e due sottosp. vett. $U, W \subset V$.
Si definisce
$$U \cap W = \{ v \in V : v \in U, v \in W \}$$

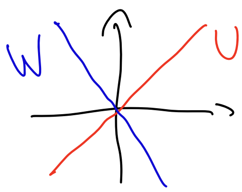
Prop $U \cap W$ è un sottosp. vettoriale

dim
- $\underline{0} \in U \cap W$
- $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$
- $v \in U \cap W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in U \cap W$ $\square$

OSS $\mathbb{R}^3$. U = soluzioni di $x+y-z=0$, $\dim U = 2$
W = soluzioni di $x-y+2z=0$, $\dim W = 2$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin W, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in W$$

$U \cap W$ = soluzioni di $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

ES



$U \cap W = \{\underline{0}\}$
$U \cup W$

Def Dato uno sp. vettoriale V, e due sottosp. vett. $U, W \subset V$
si definisce somma di U e W
$$U + W = \{ v_1 + v_2 : v_1 \in U, v_2 \in W \}$$

ES $\mathbb{R}^2$, $U = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $W = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\dim U = \dim W = 1$
$$U + W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$ $\dim (U+W) = 2$
$\dim (U \cap W) = 0$

Teorema Dato uno sp. vettoriale V, e due sottosp. vett. $U, W \subset V$

vale che

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$$

ES $\mathbb{R}^3$, $\dim U = \dim W = 2$

- Se $\dim(U+W) = 3 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$
- Se $\dim(U+W) = 2 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 2$

$\mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 1$

$\dim(U+W)$	$\dim(U \cap W)$
3	0
2	1
1	2
0	3

?