V spazio vettoriale, $(V,+)$ e molt. per scalare $\mathbb{R}$

$W \subset V$ sottosp. vett se $\underline{0} \in W$, $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

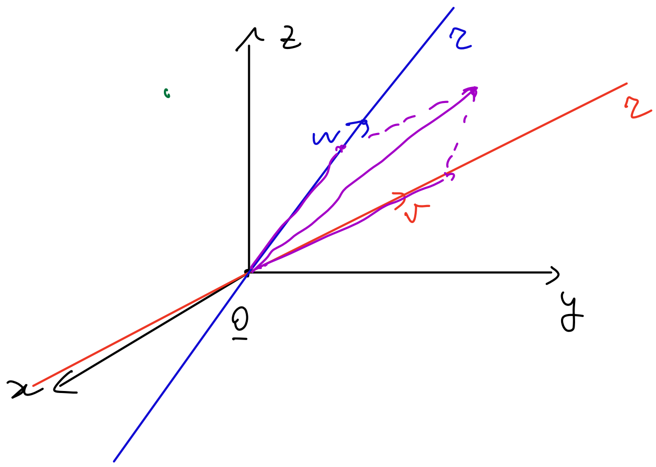
$\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in W \Rightarrow \lambda v \in W$

<u>ES</u> $V = \mathbb{R}^2$

W sono $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, rette passanti per $\underline{0}$.

<u>ES</u> $V = \mathbb{R}^3$

W può essere $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, rette passanti per $\underline{0}$, piani passanti per $\underline{0}$.



<u>ES</u> $\mathbb{R}[x]$ polinomi

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$.

- $W = \{ \lambda p(x) \,/\, \lambda \in \mathbb{R} \}$ è un sottosp. vett.?
  - $\underline{0} \in W$, ✓ $(0 \cdot p(x) = \underline{0})$
  - $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

    $v_1 = \lambda_1 p(x)$, $v_2 = \lambda_2 p(x)$

    $v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) p(x)$
  - $v \in W$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in W$
- $W = \{ \lambda p(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, \deg p = 2, \ \lambda \in \mathbb{R} \}$ è un sottosp. vett.?

- $p, q \in W \Rightarrow p+q \in W$ cioè $\deg(p+q) = 2$? NO

$$p(x) = x^2 + x - 1, \quad q(x) = -x^2$$

$$p(x) + q(x) = x - 1 \quad \text{ha grado } 1.$$

- $W = \{ p \in \mathbb{R}[x] \,/\, \deg p \leq k \}, \quad k \in \mathbb{N}.$

ES $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ = matrici con m righe ed n colonne.

OSS $\mathcal{M}(2 \times 3)$

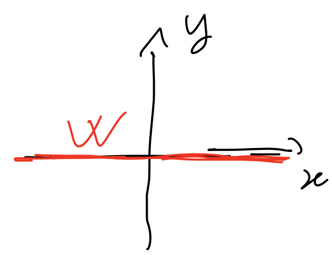
$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu B = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$



$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W = \{ A \in \mathcal{M}(2 \times 3) : a_{13} = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\}$

ES Equazioni lineari

Un'equazione lineare in n variabili è un'espressione della forma

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le variabili, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ sono i coefficienti in $\mathbb{R}$.

<u>Es</u> $n=2$, $2x+y=0$

$n=3$, $x-2y+3z=0$

$n=4$, $x_1-3x_2+6x_3+x_4=0$

<u>Prop</u> L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

<u>dim</u> $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \right\}$

- $\underline{0} \in W$? $\quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + \dots + a_{1n}\cdot 0 = 0$

- $v, w \in W \Rightarrow v+w \in W$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \iff v \in W$$

$$a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n = 0 \iff w \in W$$

$$v+w = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ \vdots \\ v_n+w_n \end{pmatrix} \in W?$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}(v_1+w_1) + a_{12}(v_2+w_2) + \dots + a_{1n}(v_n+w_n) = 0 \,?$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}v_1 + a_{11}w_1 + a_{12}v_2 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}v_n + a_{1n}w_n = 0 \,?$$

<u>Ok</u>

- $v \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in W$

$\square$

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni lineari in n variabili è un'espressione della forma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

dove le incognite sono le n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, e

$A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1 \dots n$ è la matrice in $M(m \times n)$ dei coefficienti.

Prop L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esempi

- $y = 0$ eq. lineare in 2 variabili

  variabili $= x, y$, coefficienti : $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$

  $$a_{11} x + a_{12} y = 0$$

  $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

- $x + y - z = 0$ eq. lineare in 3 variabili

  $W \subset \mathbb{R}^3$ sottosp. vett. , $W \neq \mathbb{R}^3, \{\underline{0}\}$

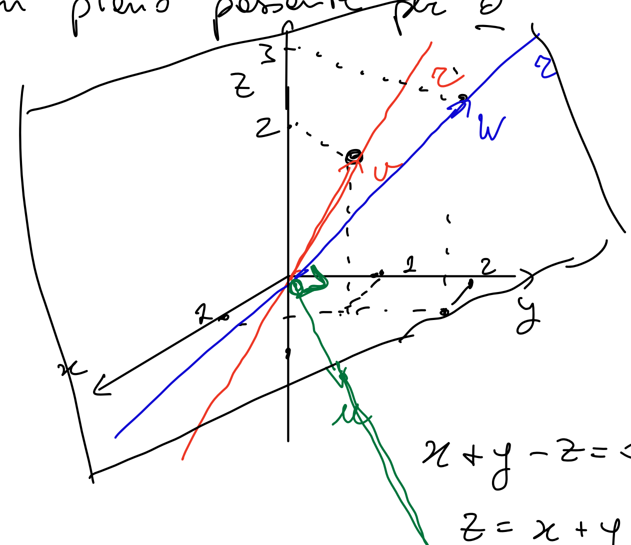
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W \quad , \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \in W \iff \lambda + \lambda - 2\lambda = 0$$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \quad \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} ? \right) \underline{\text{NO}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}1=\lambda\\ 2=\lambda\\ 3=2\lambda\end{cases}$$

W è un piano passante per $\underline{0}$



$x+y-z=0$

$z=x+y$

$v=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$w=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$u=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\notin W$

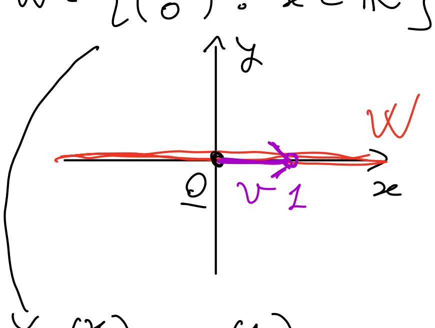
Def Sia V sp. vettoriale, e siano $v_1,\dots,v_k\in V$. Si chiama <u>sottospazio vettoriale generato da $v_1,\dots,v_k$</u>, "$\mathrm{Span}(v_1,v_2,\dots,v_k)$", il sottospazio di vettori della forma

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k \quad \Big|\ \text{combinazione lineare}$$

al variare di $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$.

ES

- $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : y=0\right\}$



$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in W$

$\mathrm{Span}(v)=\{\lambda v : \lambda\in\mathbb{R}\}=W$

$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$

- $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\right\}$ è un piano (visto sopra)

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \quad : \quad v \neq \lambda w$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad v \notin \mathrm{Span}(w) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Span}(v, w) = \{ \lambda_1 v + \lambda_2 w : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \subset W$$

e $\mathrm{Span}(v, w)$ è un piano in $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \quad W = \mathrm{Span}(v, w).$$

<u>ES</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases}$$