Spazi euclidei

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R} \}$, $\quad \mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \}$

Sono gruppi commutativi con l'operazione $+$

---

## Spazio Vettoriale

**Definizione** Uno spazio vettoriale è un insieme $V$, i cui elementi sono chiamati vettori $v, w, \dots$, dotato di un'operazione somma $+$ tra vettori e di una moltiplicazione per scalare $\mathbb{R}$ tali che $v + w \in V$, $\forall v, w \in V$, e $\lambda v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

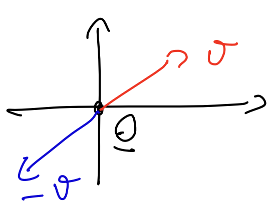
Inoltre $(V, +)$ deve essere un gruppo commutativo, ossia:

(i) esiste un elemento neutro $\underline{0} \in V$ $[\, v + \underline{0} = v \ \forall v \in V \,]$;

(ii) vale la proprietà associativa $[\, (v + w) + u = v + (w + u) \,]$;

(iii) esiste un elemento inverso $[\, \forall v \in V \ \exists w \in V : v + w = \underline{0} \,]$;

ES $\mathbb{R}^2$




(iv) vale la proprietà commutativa $[\, v + w = w + v \,]$.

Inoltre valgono:

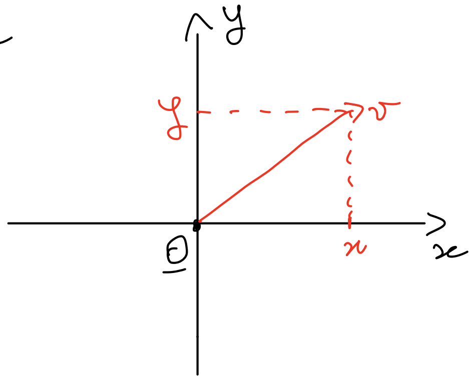
(v) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$

(vi) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in V$

(vii) $(\lambda\mu) v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$

(viii) $1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V$

ES $\mathbb{R}^2$




$$\mathbb{R}^2 = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \qquad +$$

$$\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \text{molt. per scalare}$$

ES $$\mathbb{R}^3 = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}; \quad \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

ES $$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

ES Polinomi $= \mathbb{R}[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \}$

$\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale con

" + " = somma tra polinomi

(i) el. neutro $\underline{0}$ $\quad \left[ \begin{array}{l} p(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ q(x) = 0 \end{array} \qquad p(x) + q(x) = p(x) \right]$

(ii) prop. associative

(iii) el. inverso $\quad p(x)\ \exists q(x) : p(x)+q(x)=0$

$$\left[ p(x) = 3x^2+2x-1, \quad q(x) = -3x^2-2x+1 \atop p(x)+q(x)=0 \right]$$

(iv) prop. commutative

moltiplicazione per scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $\lambda p(x) = (\lambda a_n)x^n + (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\lambda a_0)$

(v), (vi), (vii)

(viii) $1 \cdot p(x) = p(x)$.

ES Matrici

Dati $m, n \in \mathbb{N}$ si indica con $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ l'insieme di tabelle di $m \cdot n$ numeri in $\mathbb{R}$ organizzati in $m$ righe ed $n$ colonne.

[ES $\mathcal{M}(2\times 3, \mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}(1 \times 2, \mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ ]

$A \in \mathcal{M}(m\times n)$, $\quad A_1, A_2, \dots, A_m$ le righe

[ES $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_1 = (2\ \sqrt{3}\ -5)$, $A_2 = (e^{-7}\ 0\ 1)$]

$A^1, A^2, \dots, A^n$ le colonne

[ $A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-7} \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ]

I coefficienti di $A$ si indicano con $a_{ij} \in A_i \cap A^j$
$i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$[\; a_{21} = e^{-7} \;,\; a_{13} = -5 \;]$

**Prop** $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale con

somma $+$ : $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$$C = A + B = (c_{ij}) \;,\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\left[\; A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 7 \\ 0 & e & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ e^{-7} & e & 3 \end{pmatrix} \;\right]$$

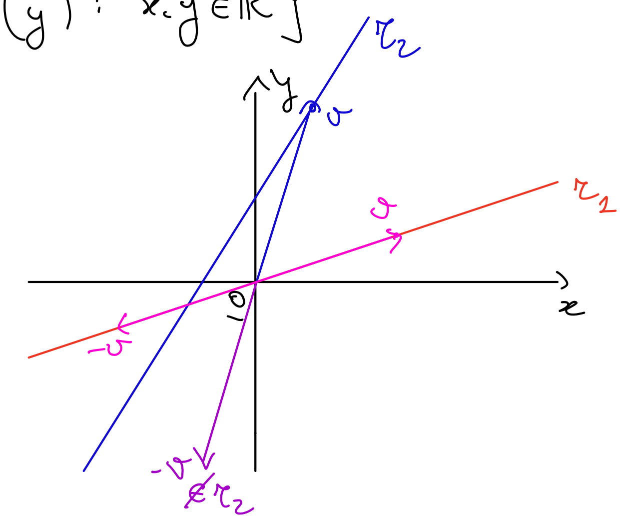
molt. per scalare $\mathbb{R}$ : $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$

$$C = \lambda A = (c_{ij}) \;,\; c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

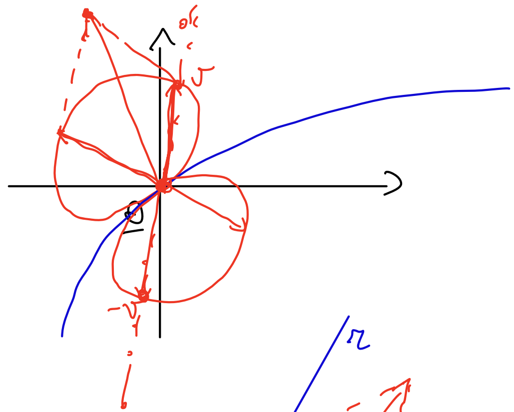
$$\left[\; A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix},\; \lambda = -2 \;,\; \lambda A = \begin{pmatrix} -4 & -2\sqrt{3} & 10 \\ -2e^{-7} & 0 & -2 \end{pmatrix} \;\right]$$

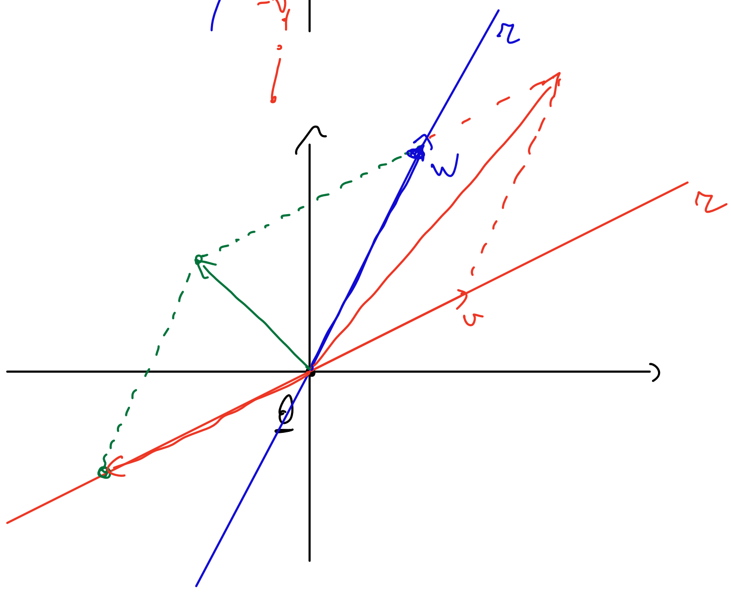
$\longleftrightarrow$

**ES** $\mathbb{R}^2 = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$




$r = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \dots \right\}$




<u>Definizione</u> Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \mathbb{R})$, un sottospazio vettoriale $W$ è un sottoinsieme di $V$ tale che:

(i) $\underline{0} \in W$ ; (ii) $\forall\, v_1, v_2 \in W$ , $v_1 + v_2 \in W$ ;

(iii) $\forall\, v \in W$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v \in W$.

<u>ES</u> $W = \{ \underline{0} \}$ , $W = V$

<u>ES</u> In $\mathbb{R}^2$, i sottospazi vettoriali sono:

$\{ \underline{0} \}$; $\mathbb{R}^2$; rette che passano per $\underline{0}$.