CLAUDIO BONANNO / DIDATTICA / El. di mat.

- Registro delle lezioni
- Team del corso.

- Algebra lineare ~ 9 lez. — 3 es.
- Analisi Matematica ~ 12 lez. — 4 "
- Statistica ~ 3 lez. — 1 "

ALGEBRA LINEARE

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali $= \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ " " " interi $= \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Proprietà di $\mathbb{N}_0$: operazione "somma" $+$

$$n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0$$

- elemento neutro 0

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 0 = n$$

- proprietà associativa

$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$$

Ma non esiste l'elemento inverso di $n \in \mathbb{N}$ (ossia $m \in \mathbb{N}$ t.c. $m + n = 0$).

Proprietà di $\mathbb{Z}$ e operazione "somma" $+$

- el. neutro 0
- prop. associativa
- el. inverso

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ è un <u>gruppo</u>

- prop. commutativa
  $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+m = m+n$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ è un <u>gruppo commutativo</u>

Consideriamo l'operazione "prodotto" $\cdot$ $(n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot m \in \mathbb{Z})$

- el. neutro $+1$
  $$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot (+1) = n$$
- prop. associativa di $\cdot$
- prop. distributiva del $\cdot$ su $+$
  $$n \cdot (m + r) = n \cdot m + n \cdot r$$

Ma non esiste l'elemento inverso di $\cdot$ (dato $n \in \mathbb{Z}$, non esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n \cdot m = +1$).

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali $\left\{ p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Proprietà di $\mathbb{Q}$ rispetto a $+$ e $\cdot$

- el. neutro di $+$, 0
- " " " $\cdot$, $+1$
- prop. associativa per $+$ e $\cdot$
- prop. distributiva di $\cdot$ su $+$
- el. inverso di $+$ e $\cdot$ (el. inverso di $\frac{p}{q} \stackrel{\neq 0}{}$ è $-\frac{p}{q}$ per $+$ e $\frac{q}{p}$ per $\cdot$)
- prop. commutativa per $+$ e $\cdot$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ è un <u>campo</u>

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali, un campo rispetto a $+$ e $\cdot$.

OSS $\quad \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

es $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad$ dim $\quad$ Dimostrazione per assurdo

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

proposizione $\qquad$ equivalente

$$\neg Q = \text{"} \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \text{"} \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N} \text{ tale che } \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ e } \overset{MCD}{(p,q)} = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p \text{ pari}$$

$$p = 2p' \text{ con } p' \in \mathbb{N} \Rightarrow 2q^2 = (2p')^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4(p')^2 \Leftrightarrow$$

$$q^2 = 2(p')^2 \Rightarrow q \text{ pari} \quad \text{ASS}$$

$\square$

Quantificatori $\quad$ "$\exists$" = esiste almeno , "$\exists!$" = esiste unico

"$\forall$" = per ogni , "$:$" = tale che

Insiemistica $\quad$ Prodotto cartesiano

A, B insiemi, $\quad A \times B := \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$

ES $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^2, +) \qquad \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

- el. neutro $(0,0)$
- prop. associativa ✓
- el. inverso per $+$, $(x,y) + (-x,-y) = (0,0)$
- prop. commutativa ✓

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo commutativo

OSS $\quad (\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo commutativo.

OSS $\mathbb{C}$ numeri complessi $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $(i)^2 = -1$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow x + iy \in \mathbb{C}$$

$$(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, y_1 x_2 + (i)^2 y_1 y_2 =$$
$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo

- el. neutro $(1,0)$ $\left[(x,y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0,\ x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x,y) \right]$
- prop. associative
- prop. distributive
- el. inverso per $(x,y) \neq (0,0)$ è $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) =$$
$$= \left(x \frac{x}{x^2+y^2} - y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right),\ x\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + y \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$
$$= (1, 0)$$

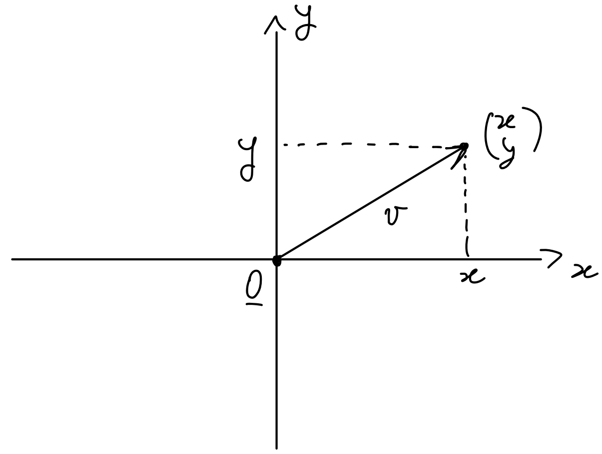
- prop. commutative

Spazi vettoriali

ES $\mathbb{R}^n$

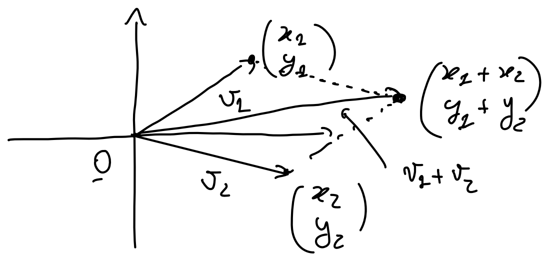
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ vettori}, \quad x, y \text{ componenti}$$

piano cartesiano
$\mathbb{R}^2$



Proprietà di $\mathbb{R}^2$: operazione "somma" $+$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



- molt. per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$
- $\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$
- $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$
- $(\lambda \mu) v = \lambda (\mu v)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$