

Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 20-07-2026

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \log(3x - 2 - x^2)$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D .

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x), & \text{se } x \geq 0, \\ \log(-x), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$|x| + 3x \geq 2x - 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-3, -3, -2, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 3\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e scarto quadratico medio del campione.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare l'espressione come spazio affine della retta in $\mathbb{R}^2$ ortogonale al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e passante per il punto $w = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$.

Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Esercizio 7. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste l'inversa della seguente matrice A , e in caso determinarla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare in due variabili ammette soluzioni, e nel caso determinarle:

$$\begin{cases} x + 2y = k \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

ES. 1

$$f(x) = \log(3x - 2 - x^2)$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2 - x^2 > 0\}$$

Perché $3x - 2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$, si ha

$$D = (1, 2)$$

Gli estremi di D sono 1 e 2, e non appartengono a D . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(3x - 2 - x^2) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \log(3x - 2 - x^2) = \log(0^+) = -\infty$$

ES. 2

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\left(2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = 2x$

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x), & \text{se } x \geq 0; \\ \log(-x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$, la funzione si scrive come composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resta da valutare come si comporta in 0. Affinché f sia continua in 0, deve verificarsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1+x) = \log(1) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \log(-x) = \log(0^+) = -\infty$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste, e poiché il limite sinistro è uguale a $-\infty$, concludiamo che $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in 0 c'è una discontinuità di seconda specie.

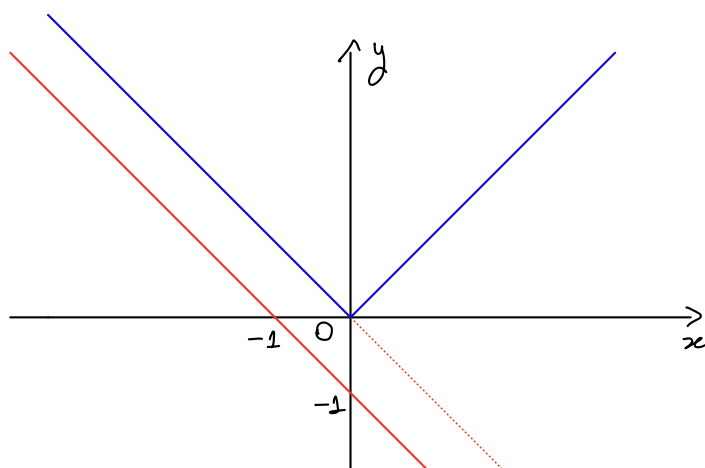
ES. 4

$$|x| + 3x \geq 2x - 1$$

Per ricondurre a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disuguaglianza come

$$|x| \geq -x - 1$$

e poniamo $f(x) = |x|$, $g(x) = -x - 1$. Il grafico di f è quello noto della funzione $|x|$. Il grafico di g è invece la retta $y = -x$ traslata in basso di 1.



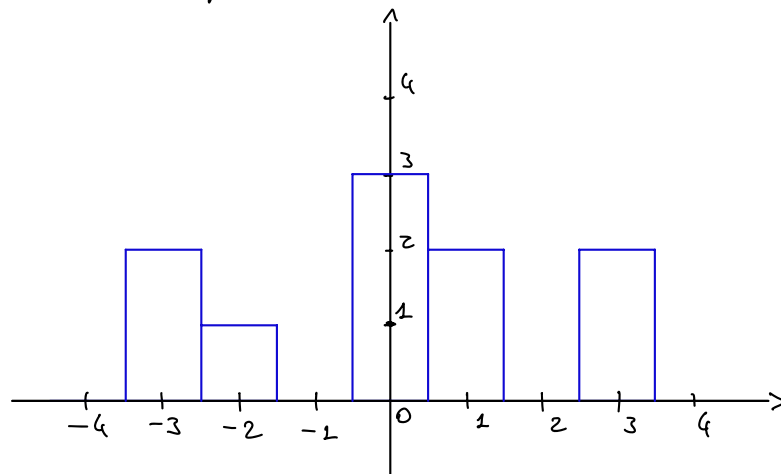
$f(x)$ — (blue line)
 $g(x)$ — (red solid line)
 $y = -x$ (red dotted line)

Quindi $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ES. 5

$$x = \{-3, -3, -2, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 3\}$$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N=10$, e x_i sono i dati.

Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (-3 - 3 - 2 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 3 + 3) = 0$$

La varianza del campione si calcola come

$$\text{var}(x) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

e lo scarto quadratico medio $\sigma(x)$ è dato da $\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)}$. Quindi

$$\text{var}(x) = \frac{1}{10} ((-3)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) - 0^2 = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}, \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{21}{5}}$$

ES. 6

Sono dati $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

La retta ortogonale a v e passante per w si scrive come spazio affine come

$r: w + \text{span } u$, con $u \in \mathbb{R}^2$ tale che $\langle v, u \rangle = 0$. Scegliendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si ha

$0 = \langle v, u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = x - 2y$, possiamo scegliere $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$r: \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo $k \in \mathbb{R}$ tale che $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$. Deve esistere $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$P = w + tu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k + 2t \\ 0 = k + t \end{cases}$$

Quindi $k = -t$ e $2 = t$. Da cui deve essere $k = -2$.

ES. 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La matrice inversa di A esiste se e solo se $\det A \neq 0$. Si ha

$$\begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \cdot 6 - 3 \cdot (-2k) = 6 + 6k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1.$$

Quindi A^{-1} esiste se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Sia $k \neq -1$, poniamo

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2k & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 3C_1, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2k & 1 & 0 \\ 0 & 6(1+k) & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{6(1+k)} C_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2(1+k)} & \frac{1}{6(1+k)} \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow C_1 + 2kC_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{1+k} & \frac{k}{3(1+k)} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2(1+k)} & \frac{1}{6(1+k)} \end{array} \right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{k}{3(1+k)} \\ -\frac{1}{2(1+k)} & \frac{1}{6(1+k)} \end{pmatrix}$$

ES. 8

$$\begin{cases} x + 2y = k \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Chiamiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti, $\underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ il vettore dei termini noti, e $C = (A \mid \underline{b})$ la matrice completa.

Il sistema ammette soluzioni se e solo se $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$.

Calcoliamo il $\det(A)$. Si ha

$$\begin{array}{l} \oplus \\ \ominus \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0.$$

Quindi $\text{rank}(A) < 2$. Poiché esiste un termine non nullo, si ha $\text{rank}(A) = 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\text{rank}(C) \in \{1, 2\}$. Si ha $\text{rank}(C) = 2$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & k \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{array}{l} \oplus \\ \ominus \end{array} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \det = 1 \cdot 0 - 3 \cdot k = -3k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Quindi se $k \neq 0$, $\text{rank}(C) = 2$ e il sistema non ha soluzioni.

Se $k=0$, si ha $\text{rank}(C) < 2$, quindi $\text{rank}(C) = 1$ e il sistema ammette soluzioni, date da uno spazio vettoriale W di dimensione $= 2 - \text{rank}(A) = 1$.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 3C_1, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema è equivalente a $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$, da cui

$$W = \text{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$