

**Sistemi Dinamici**  
**Corso di Laurea in Matematica**  
**Compito del 20-06-2024**

**Esercizio 1. (10 punti)** Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + 2y^2 - 2 \\ \dot{y} = y^2 - 1 + \mu \end{cases}$$

al variare di  $\mu \in [0, +\infty)$ .

**Esercizio 2. (10 punti)** Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (\mu - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

al variare di  $\mu \in (-2, 2) \setminus \{0\}$ , determinando in particolare gli insiemi  $\omega(x, y)$  al variare di  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 3. (10 punti)** Si consideri la famiglia di trasformazioni continue

$$f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } x \in J_1 := [0, \frac{1}{3}], \\ (3 - 2\lambda)x - 1 + \lambda, & \text{se } x \in J_2 := [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \lambda x + 1 - \lambda, & \text{se } x \in J_3 := [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

per valori del parametro  $\lambda \in (0, 3]$ .

- (a) Determinare i punti fissi di  $f_\lambda$  e discuterne la stabilità al variare di  $\lambda$ .
- (b) Discutere l'esistenza di orbite di periodo minimo 2 al variare di  $\lambda$ .
- (c) Si costruisca l' $f_\lambda$ -grafo associato alla partizione  $J = \{J_1, J_2, J_3\}$  al variare di  $\lambda$ .

# ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + 2y^2 - 2 \\ \dot{y} = y^2 - 1 + \mu \end{cases}, \quad \mu \in [0, +\infty)$$

## Punti fissi.

Se  $\mu > 1$ , si ha  $y^2 - 1 + \mu > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , quindi in questo caso non esistono punti fissi.

Se  $\mu = 1$ , dalla seconda equazione si trova  $y = 0$ , che sostituito nella prima equazione implica che anche in questo caso non ci sono punti fissi.

Se  $\mu \in [0, 1)$ , dalla seconda equazione si trova  $y = \pm \sqrt{1-\mu}$ , e sostituendo nella prima equazione si trovano i punti fissi  $P_1 = \left( \frac{2\mu}{\sqrt{1-\mu}}, \sqrt{1-\mu} \right)$ ,  $P_2 = \left( -\frac{2\mu}{\sqrt{1-\mu}}, -\sqrt{1-\mu} \right)$ .

Per studiare la stabilità usano  $JF(x, y)$ , si ha

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\mu} & \frac{2\mu}{\sqrt{1-\mu}} + 4\sqrt{1-\mu} \\ 0 & 2\sqrt{1-\mu} \end{pmatrix}$$

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} y & x + 4y \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\mu} & -\frac{2\mu}{\sqrt{1-\mu}} - 4\sqrt{1-\mu} \\ 0 & -2\sqrt{1-\mu} \end{pmatrix}$$

Per  $P_1$  si trova che gli autovalori di  $JF(P_1)$  sono  $\{\sqrt{1-\mu}, 2\sqrt{1-\mu}\}$ , reali e positivi, quindi  $P_1$  è un punto fisso iperbolico di tipo nodo instabile.

Per  $P_2$  si trova che gli autovalori di  $JF(P_2)$  sono  $\{-\sqrt{1-\mu}, -2\sqrt{1-\mu}\}$ , reali e negativi, quindi  $P_2$  è un punto fisso iperbolico di tipo nodo stabile.

## Insiemi invarianti

Dalla seconda equazione si ottiene che per  $\mu \in [0, 1]$  ci sono rette invarianti della forma  $\{y = c\}$ . In particolare, se  $\mu = 1$  è invariante la retta  $\{y = 0\}$ , mentre per  $\mu \in [0, 1)$  sono invarianti le rette  $\{y = \sqrt{1-\mu}\}$  e  $\{y = -\sqrt{1-\mu}\}$ .

In entrambi i casi basta usare la funzione  $I(x, y) = y$  che verifica  $\nabla I \neq 0$  e  $\dot{I}(x, y) = y^2 - 1 + \mu$ .

Cerchiamo altre rette invarianti della forma  $\{ax+by-c=0\}$  con  $a \neq 0$  (il caso  $a=0$  corrisponde al caso precedente). Ponendo  $I(x,y) = ax+by$  si ha  $\nabla I \neq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\dot{I}|_{I=c} = axy + 2ay^2 - 2a + by^2 - b + b\mu \Big|_{x=\frac{c-by}{a}} =$

$$= (c-by)y + 2ay^2 - 2a + by^2 - b + b\mu = 2ay^2 + cy - 2a - b + b\mu.$$

Quindi  $\dot{I}|_{I=c} \equiv 0$  solo se  $a=c=2a+b-b\mu=0$ , il che contraddice  $a \neq 0$ .

Non ci sono dunque altre rette invarianti  $\forall \mu \in [0, +\infty)$ .

### Orbite periodiche

Il sistema non può ammettere orbite periodiche. Infatti, per la teoria di Poincaré sappiamo che un'orbita periodica deve circondare un punto fisso. Quindi, se  $\mu \geq 1$  non ci possono essere orbite periodiche perché non ci sono punti fissi. Nel caso  $\mu \in [0, 1)$  invece, abbiamo trovato che per ciascun punto fisso passa una retta invariante. Quindi, per l'unicità locale delle soluzioni del sistema, non possono esserci orbite periodiche che circondano i punti fissi.

### Simmetrie

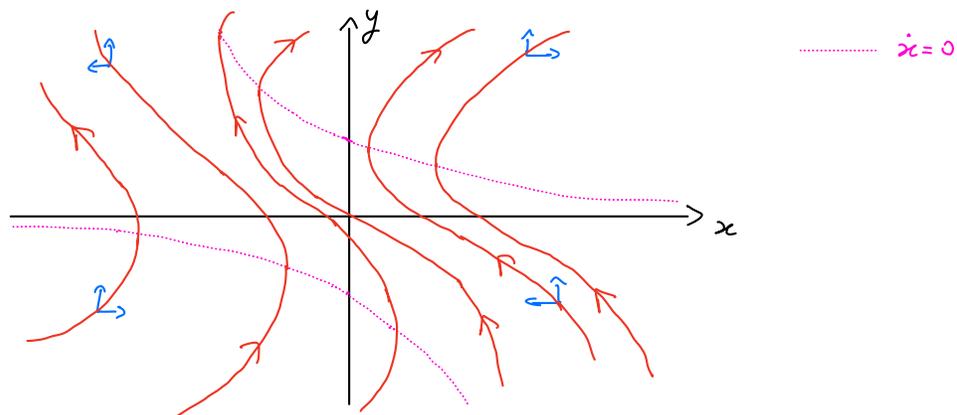
Osserviamo che se  $(x(t), y(t))$  è soluzione del sistema, lo è anche

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t)).$$

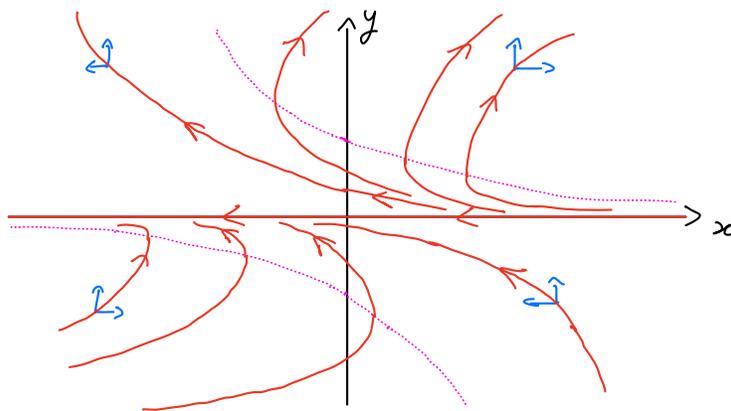
$$\text{Infatti: } \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(-t) \cdot (-1) = x(-t)y(-t) + 2y(-t)^2 - 2 = \tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + 2\tilde{y}(t)^2 - 2 \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(-t) \cdot (-1) = y(-t)^2 - 1 + \mu = \tilde{y}(t)^2 - 1 + \mu. \end{cases}$$

### Ritratti di fase

$\mu > 1$

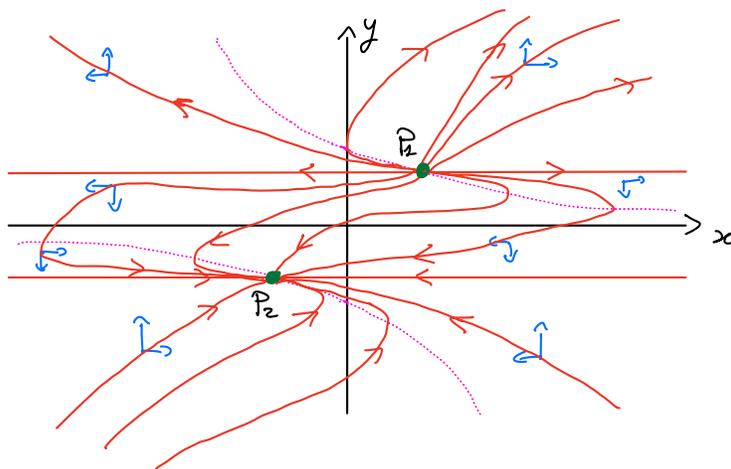


$$\underline{\mu = 1}$$



$$\dots\dots\dots \dot{x} = 0$$

$$\underline{\mu \in [0, 1)}$$



$$\dots\dots\dots \dot{x} = 0$$

ESERCIZIO  
2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (\mu - x^2 - y^2)y \end{cases}, \quad \mu \in (-2, 2) - \{0\}$$

### Punti fissi

Dalla prima equazione troviamo  $y = 0$ , che sostituito nella seconda implica che per ogni  $\mu$  si ha un unico punto fisso  $P = (0, 0)$ .

Per studiare la stabilità usiamo  $JF(x, y)$ , si ha

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

Quindi  $\det JF(P) = 1 > 0$ ,  $\text{tr } JF(P) = \mu$ ,  $\text{tr } JF(P)^2 - 4 \det JF(P) = \mu^2 - 4 < 0$

$\forall \mu \in (-2, 2)$ . Risulta che P è un punto fisso iperbolico di tipo

fuoco stabile se  $\mu \in (-2, 0)$ , e di tipo fuoco instabile se  $\mu \in (0, 2)$ .

### Coordinate polari

Passando alle coordinate polari:  $(\rho, \vartheta) \in (0, +\infty) \times S^1$ , si trova

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x\dot{x} + y\dot{y}) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = \frac{1}{\rho} (x\dot{y} - y\dot{x} + (\mu - x^2 - y^2)y^2) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = \\ = (\mu - \rho^2) \rho \sin^2 \vartheta \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2} (y\dot{x} - x\dot{y}) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = \frac{1}{\rho^2} (-x^2 + (\mu - x^2 - y^2)xy - y^2) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = \\ = -1 + (\mu - \rho^2) \cos \vartheta \sin \vartheta \end{cases}$$

In particolare, se  $\mu \in (-2, 0)$  si ha  $\dot{\rho} \leq 0 \forall (\rho, \vartheta)$  e  $\dot{\rho} = 0 \Leftrightarrow \sin \vartheta = 0$ .

Poiché l'insieme  $\{(\rho, \vartheta) / \sin \vartheta = 0\}$  è la retta  $\{y=0\}$  che non è invariante, otteniamo che se  $\mu \in (-2, 0)$  allora  $\omega(x, y) = \{P\} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Consideriamo ora il caso  $\mu \in (0, 2)$ . In questo caso osserviamo che l'insieme

$\{\rho = \sqrt{\mu}\}$  è invariante, infatti ponendo  $I(\rho, \vartheta) = \rho$  si ha  $\forall I \neq 0$  e

$\dot{I}|_{I=\sqrt{\mu}} = (\mu - \mu) \sqrt{\mu} \sin^2 \vartheta \equiv 0$ . Inoltre non ci sono punti fissi in  $\{\rho = \sqrt{\mu}\}$ , si ha  $\dot{\vartheta}|_{\rho=\sqrt{\mu}} = -1$ , quindi nel piano euclideo otteniamo che l'insieme

$\Gamma := \{x^2 + y^2 = \mu\}$  è invariante ed è un'orbita periodica. Inoltre, escludendo

l'insieme  $\{\sin \vartheta = 0\}$ , si ha  $\dot{\rho} > 0$  se  $\rho \in (0, \sqrt{\mu})$  e  $\dot{\rho} < 0$  se  $\rho > \sqrt{\mu}$ .

Ragionando come sopra possiamo concludere che  $\omega(P) = \{P\}$ , e

$\omega(x, y) = \Gamma \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

### Simmetrie

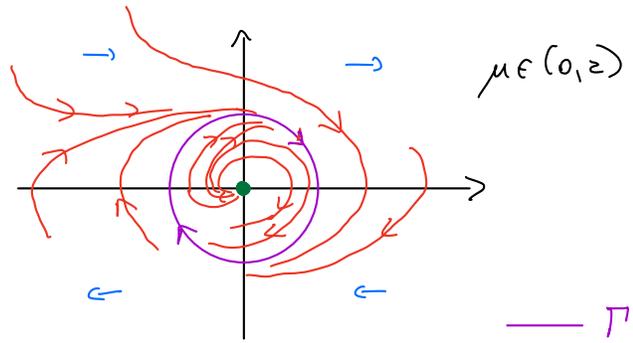
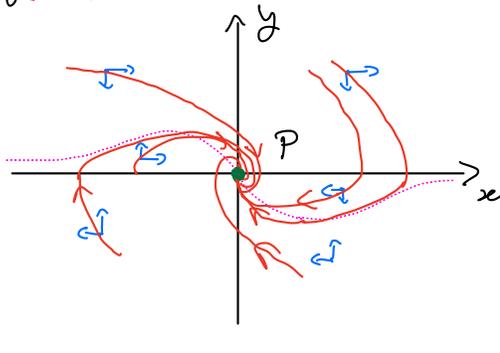
Osserviamo che se  $(x(t), y(t))$  è soluzione del sistema, lo è anche

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$$

Infatti  $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -y(t) = \tilde{y}(t) \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(t) = x(t) - (\mu - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) = -\tilde{x}(t) + (\mu - \tilde{x}(t)^2 - \tilde{y}(t)^2)\tilde{y}(t) \end{cases}$

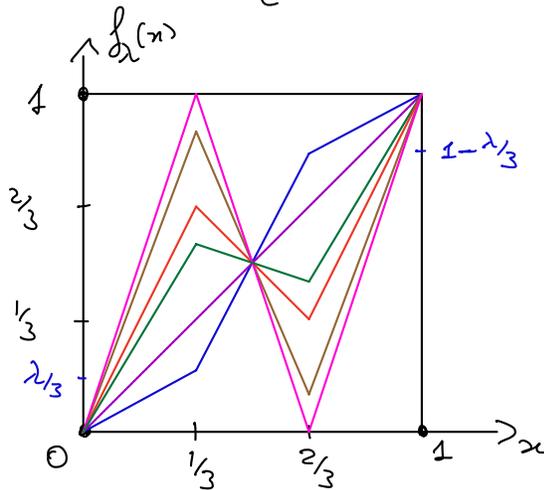
Ritorni di fase.

$$\mu \in (-2, 0)$$



ESERCIZIO  
3

$$f_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in J_1 := [0, 1/3] \\ (3-2\lambda)x - 1 + \lambda, & x \in J_2 := [1/3, 2/3] \\ \lambda x + 1 - \lambda, & x \in J_3 := [2/3, 1] \end{cases}, \quad \lambda \in (0, 3]$$



$$\lambda \in (0, 1)$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda \in (1, 2)$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda \in (2, 3)$$

$$\lambda = 3$$

(a) Osserviamo innanzitutto che per  $\lambda=1$  si ha  $f_\lambda(x)=x$ . Quindi in questo caso tutti i punti di  $[0, 1]$  sono fissi. Per gli altri valori di  $\lambda$ , procediamo a caso succedendo su  $J_1, J_2, J_3$  separatamente.

In  $J_1$ ,  $f_\lambda$  ha un punto fisso in  $x_1=0 \forall \lambda \in (0, 3] \setminus \{1\}$ , e non ne ha altri.

In  $J_2$ , si verifica che  $(3-2\lambda)x - 1 + \lambda = x \Leftrightarrow 2(1-\lambda)x = 1 - \lambda \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ , quindi  $f_\lambda$  ha un punto fisso in  $x_2 = \frac{1}{2} \forall \lambda \in (0, 3] \setminus \{1\}$ , e non ne ha altri.

In  $J_3$ ,  $f_\lambda$  ha un punto fisso in  $x_3=1 \forall \lambda \in (0, 3] \setminus \{1\}$ , e non ne ha altri.

Per questo riguarda la stabilità dei punti fissi, se  $\lambda=1$  tutti i punti di  $[0,1]$  sono fissi e sono quindi stabili ma non attrattivi.

Per  $\lambda \in (0,3] \setminus \{1\}$  possiamo usare  $|f'_\lambda|$  in tutti i punti fissi (in  $x_1$  e  $x_3$  è sufficiente guardare alla derivata destra o sinistra).

$x_1=0$ . Si ha  $f'_\lambda(0) = \lambda$ , quindi

- se  $\lambda \in (0,1)$ ,  $x_1$  è attrattivo;

- se  $\lambda \in (1,3]$ ,  $x_1$  è repulsivo.

$x_2 = \frac{1}{2}$ . Si ha  $f'_\lambda(\frac{1}{2}) = 3-2\lambda$ , quindi

$$|f'_\lambda(\frac{1}{2})| = \begin{cases} 3-2\lambda, & \lambda \in (0, \frac{3}{2}) \\ 2\lambda-3, & \lambda \in [\frac{3}{2}, 3] \end{cases}$$

e  $|f'_\lambda(\frac{1}{2})| < 1$  se  $\lambda \in (1,2)$ ,  $|f'_\lambda(\frac{1}{2})| = 1$  se  $\lambda \in \{1,2\}$ ,  $|f'_\lambda(\frac{1}{2})| > 1$  se  $\lambda \in (0,1) \cup (2,3]$ . Escludendo quindi il caso  $\lambda=1$  troviamo:

- se  $\lambda \in (0,1) \cup (2,3]$ ,  $x_2$  è repulsivo;

- se  $\lambda \in (1,2)$ ,  $x_2$  è attrattivo;

- se  $\lambda=2$ , osserviamo che  $f_2|_{\mathcal{I}_2}(x) = -x+1 \in \mathcal{I}_2$ , e

$f_2^2|_{\mathcal{I}_2}(x) = -(-x+1)+1 = x$ . Tutti i punti di  $\mathcal{I}_2$  sono periodici di periodo 2, e quindi  $x_2$  è stabile ma non attrattivo.

$x_3=1$ . Si ha  $f'_\lambda(1) = \lambda$ , quindi

- se  $\lambda \in (0,1)$ ,  $x_3$  è attrattivo;

- se  $\lambda \in (1,3]$ ,  $x_3$  è repulsivo.

(b)

Se  $\lambda \in (0,1)$ , dallo studio dei punti fissi e dal grafico di  $f_\lambda$  possiamo concludere che  $\forall x \in [0,1]$ ,  $\omega(x)$  è uno dei punti fissi. Dunque non esistono orbite periodiche di periodo minimo 2.

Il caso  $\lambda=1$  l'abbiamo già studiato e concludiamo che non esistono orbite periodiche

di periodo minimo 2.

Se  $\lambda \in (1, 2)$ , come prima possiamo concludere che  $\forall x \in [0, 2]$ ,  $w(x)$  è uno dei punti fissi. Dunque non esistono orbite periodiche di periodo minimo 2.

Se  $\lambda = 2$ , osserviamo che

$$\forall x \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 \setminus \{x_1, x_3\} \exists \bar{m} \text{ t.c. } f_2^m(x) \in \mathcal{I}_2 \quad \forall m \geq \bar{m}.$$

Inoltre abbiamo già osservato che tutti i punti di  $\mathcal{I}_2$  sono periodici di periodo 2.

Quindi i punti periodici di periodo minimo 2 sono tutti e soli i punti dell'insieme  
 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ .

Se  $\lambda \in (2, 3]$ , ci aspettiamo che esistano orbite periodiche di periodo minimo 2.

Consideriamo  $f_2^2(x)$ , che sarà lineare e tratti, e la valutiamo su alcuni punti.

-  $f_2(\mathcal{I}_1) = [0, \frac{1}{3}]$  con  $\frac{1}{3} > \frac{2}{3}$ , quindi  $f_2(\mathcal{I}_1) \supset \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$  e  $f_2(\mathcal{I}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{I}}_3 \neq \emptyset$ .

Si ha  $f_2([0, \frac{1}{3\lambda}]) = \mathcal{I}_1$ ,  $f_2([\frac{1}{3\lambda}, \frac{2}{3\lambda}]) = \mathcal{I}_2$  (con  $\frac{2}{3\lambda} < \frac{1}{3}$ ). Calcoliamo

$$f_2^2(0) = 0, \quad f_2^2\left(\frac{1}{3\lambda}\right) = \frac{\lambda}{3} > \frac{1}{3\lambda} \text{ per } \lambda > 1, \quad f_2^2\left(\frac{2}{3\lambda}\right) = 1 - \frac{1}{3}\lambda < \frac{2}{3\lambda} \text{ per}$$

$$\lambda \in (0, 1) \cup (2, 3], \quad f_2^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + 1 - \lambda > \frac{1}{3} \text{ per } \lambda \in (0, 1) \cup (2, 3].$$

-  $f_2(\mathcal{I}_2) = [1 - \frac{\lambda}{3}, \frac{2}{3}]$  con  $1 - \frac{\lambda}{3} < \frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$ , quindi  $f_2(\mathcal{I}_2) \supset \mathcal{I}_2$  e

$f_2(\mathcal{I}_2) \cap \overset{\circ}{\mathcal{I}}_1 \neq \emptyset$ ,  $f_2(\mathcal{I}_2) \cap \overset{\circ}{\mathcal{I}}_3 \neq \emptyset$ . Si ha  $f_2([\frac{5/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}, \frac{4/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}]) = \mathcal{I}_2$ .

Calcoliamo  $f_2^2\left(\frac{5/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}\right) = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{\lambda}{3} < \frac{1}{3} < \frac{5/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}$ , e

$$f_2^2\left(\frac{4/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}\right) = f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\lambda}{3} > \frac{2}{3} > \frac{4/3 - \lambda}{3 - 2\lambda}.$$

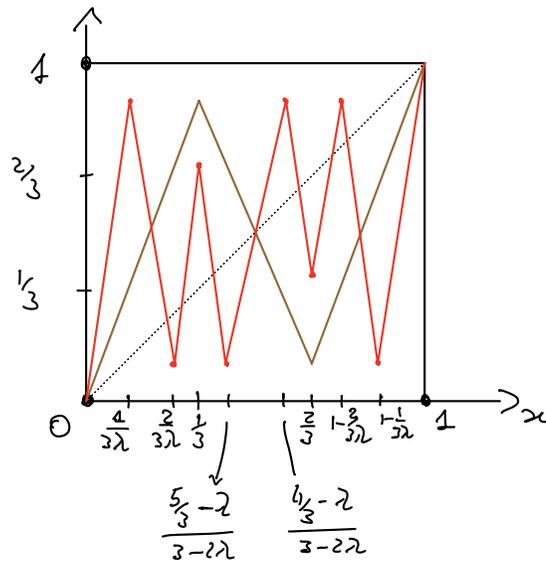
-  $f_2(\mathcal{I}_3) = [1 - \frac{\lambda}{3}, 1]$  con  $1 - \frac{\lambda}{3} < \frac{1}{3}$ , quindi  $f_2(\mathcal{I}_3) \supset \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$  e  $f_2(\mathcal{I}_3) \cap \overset{\circ}{\mathcal{I}}_1 \neq \emptyset$ .

Si ha  $f_2([1 - \frac{2}{3\lambda}, 1 - \frac{1}{3\lambda}]) = \mathcal{I}_2$ ,  $f_2([1 - \frac{1}{3\lambda}, 1]) = \mathcal{I}_3$  (e  $1 - \frac{2}{3\lambda} > \frac{2}{3}$ ) Calcoliamo

$$f_2^2(1) = 1, \quad f_2^2\left(1 - \frac{1}{3\lambda}\right) = 1 - \frac{\lambda}{3} < 1 - \frac{1}{3\lambda} \text{ per } \lambda > 1, \quad f_2^2\left(1 - \frac{2}{3\lambda}\right) = \frac{\lambda}{3} > 1 - \frac{2}{3\lambda}$$

$$\text{per } \lambda \in (0, 1) \cup (2, 3], \quad f_2^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\lambda^2 + \lambda(2 - \lambda) < \frac{2}{3} \text{ per } \lambda \in (0, 1) \cup (2, 3].$$

Le informazioni che abbiamo sono sufficienti per disegnare il grafico di  $f_2^2$  per un valore  $\lambda \in (2, 3]$  in maniera qualitativa, con lo scopo di identificare l'esistenza di soluzioni di  $f_2^2(x) = x$  diverse dai punti fissi.



$f_2^{(n)}$

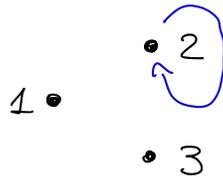
$f_2^2(n)$

Le relazioni che abbiamo trovato implicano dunque che  $\forall \lambda \in (2, 3]$  esistono tre orbite periodiche distinte di periodo minimo 2.

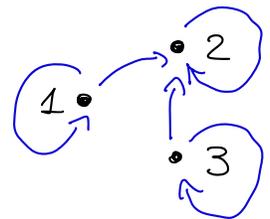
(c)

Usando il grafico di  $f_2$  al variare di  $\lambda$  possiamo disegnare i seguenti grafi associati alla partizione  $\{T_1, T_2, T_3\}$ .

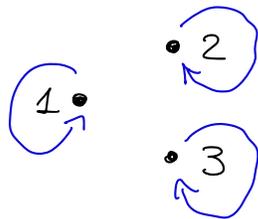
-  $\lambda \in (0, 1)$



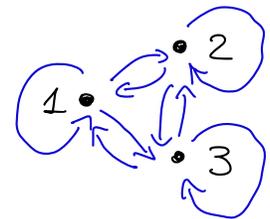
-  $\lambda \in [2, 3)$



-  $\lambda = 1$



-  $\lambda = 3$



-  $\lambda \in (1, 2)$

