

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 19-09-2022

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 + \mu \\ \dot{y} = xy + 2x^2 - 8 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\mu x + y(y^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

- (a) Nel caso $\mu = 0$, determinare un integrale primo per il sistema.
- (b) Studiare la stabilità dei punti fissi per ogni $\mu \geq 0$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la trasformazione

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x), & \text{per } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x), & \text{per } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

- (a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi e delle orbite periodiche di periodo 2.
- (b) Discutere esistenza e stabilità delle orbite periodiche di periodo $k > 2$.
- (c) Determinare l' ω -limite di tutti i punti di $[0,1]$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 + \mu \\ \dot{y} = xy + 2x^2 - 8 \end{cases}, \quad \mu \in [0, +\infty)$$

Punti fissi

Ponendo $\begin{cases} x^2 - 4 + \mu = 0 \\ xy + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$ troviamo i seguenti casi:

- $\mu \geq 4$. Non esistono punti fissi.

- $\mu \in [0, 4)$. Esistono due punti fissi

$$P_1 = \left(\sqrt{4-\mu}, \frac{2\mu}{\sqrt{4-\mu}} \right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{4-\mu}, -\frac{2\mu}{\sqrt{4-\mu}} \right)$$

Poiché $JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 4x+y & x \end{pmatrix}$ si ha che:

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{4-\mu} & 0 \\ 2\frac{8-\mu}{\sqrt{4-\mu}} & \sqrt{4-\mu} \end{pmatrix} \quad \det JF(P_1) = 2(4-\mu) > 0$$
$$\operatorname{tr} JF(P_1) = 3\sqrt{4-\mu} > 0$$

e $\operatorname{tr}^2 JF(P_1) - 4 \det JF(P_1) = 4-\mu > 0$, per cui

P_1 è un nodo instabile $\forall \mu \in [0, 4)$;

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{4-\mu} & 0 \\ -2\frac{8-\mu}{\sqrt{4-\mu}} & -\sqrt{4-\mu} \end{pmatrix} \quad \det JF(P_2) = 2(4-\mu) > 0$$
$$\operatorname{tr} JF(P_2) = -3\sqrt{4-\mu} > 0$$

e $\operatorname{tr}^2 JF(P_2) - 4 \det JF(P_2) = 4-\mu > 0$, per cui

P_2 è un nodo stabile $\forall \mu \in [0, 4)$.

Invarianti Dalla prima equazione del sistema si ottiene

che se $\mu \in [0, 4)$, le rette $x = \sqrt{4-\mu}$ e $x = -\sqrt{4-\mu}$ sono invarianti. Infatti se

$$I_{\pm}(x, y) = x \mp \sqrt{4-\mu} y, \quad \text{e} \quad \dot{I}_{\pm} \Big|_{x=\pm\sqrt{4-\mu}} \equiv 0$$

Allo stesso modo, se $\mu = 4$, la retta $x = 0$ è invariante

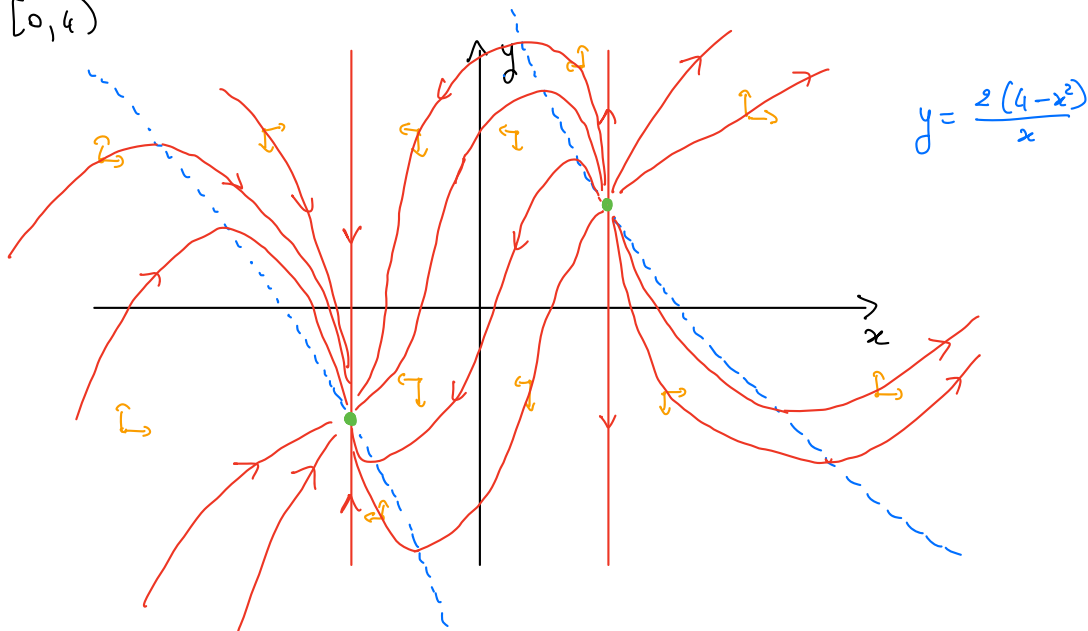
Orbite periodiche Per la teoria dell'indice di Poincaré, potrebbero esistere orbite periodiche solo per $\mu \in [0, 4)$ e circondanti uno dei due punti fissi. L'esistenza delle rette invarianti impedisce che tali orbite periodiche esistano per l'unicità locale delle soluzioni del sistema.

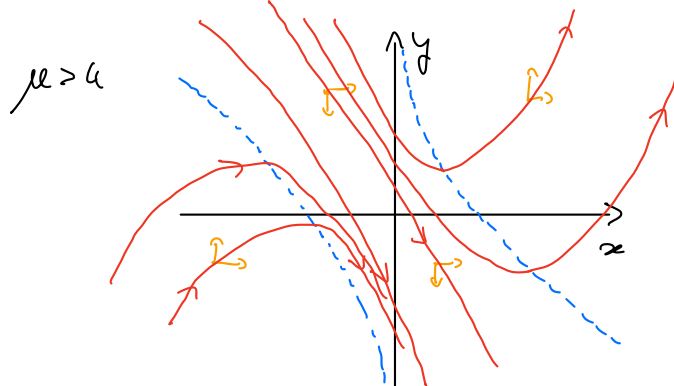
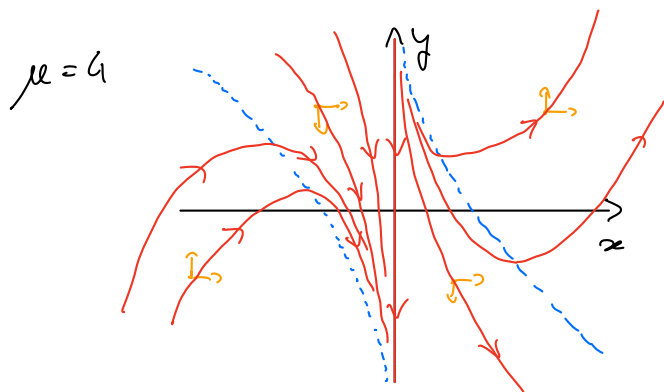
Simmetrie Se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$ (invertiamo anche il verso del moto), infatti

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) - 4 + \mu = \tilde{x}^2(t) - 4 + \mu \\ \dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(-t) = x(-t)y(-t) + 2x^2(-t) - 8 = \tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + 2\tilde{x}^2(t) - 8 \end{cases}$$

Ritratto di fase Usiamo le informazioni ottenute e il segno del campo.

$\mu \in [0, 4)$





ESERCIZIO 2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\mu x + y(y^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x \end{cases}, \quad \mu \in [0, +\infty)$$

(a) Per $\mu = 0$ si possono scrivere le isocline. Infatti le

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y(y^2 - 1)}$$

si ottiene che un integrale primo del sistema è

$$I(x, y) = \int y(y^2 - 1) dy - \int 4x dx = \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{2} y^2 - 2x^2$$

(b) I punti fissi del sistema sono

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, +1), \quad P_3 = (0, -1)$$

Usando $JF(x, y) = \begin{pmatrix} -2\mu & 3y^2 - 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene che P_2 e P_3

sono punti di sella, infatti

$$JF(P_2) = JF(P_3) = \begin{pmatrix} -2\mu & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha $\det = -8 < 0 \quad \forall \mu \geq 0$.

Per P_1 si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} -2\mu & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ per cui

$\det = 4 > 0$ e $\text{tr} = -2\mu$. Se $\mu > 0$ si ha che P_2 è stabile e

$$\text{tr}^2 - 4 \det = 4\mu^2 - 16 \begin{cases} > 0 & \text{se } \mu \in (2, +\infty) \Rightarrow P_2 \text{ nodo} \\ = 0 & \text{se } \mu = 2 \Rightarrow P_2 \text{ nodo improprio} \\ < 0 & \text{se } \mu \in (0, 2) \Rightarrow P_2 \text{ fuoco} \end{cases}$$

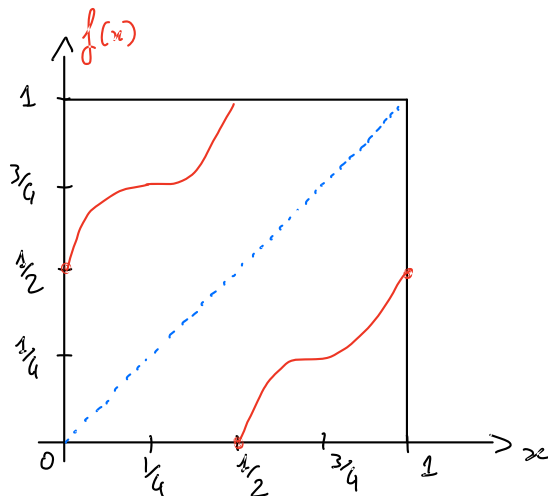
Se $\mu = 0$, P_2 non è iperbolico, e usiamo l'integrale primo $I(x, y)$ trovato al punto (i).

Si ha $I(P_2) = I(0, 0) = 0$, e P_2 è un punto di ~~massimo~~ locale per $I(x, y)$. Di conseguenza gli insiemi di livello di $I(x, y)$ in un intorno di P_2 sono curve chiuse. Poiché $I(x, y)$ è un integrale primo si trova che P_2 è un punto stabile secondo Lyapunov, ma non asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4u} \sin(4ux) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4u} \sin(4ux) & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(a) Disegniamo il grafico di f . Osserviamo che $f(x + \frac{1}{2}) = f(x) - \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

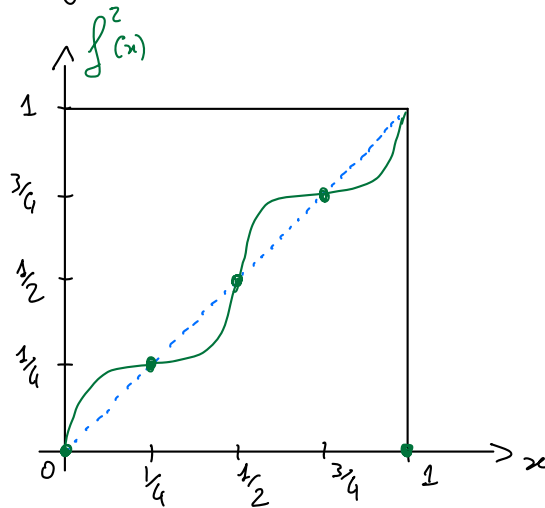


Ne segue che non esistono punti fissi per f .

Abbiamo ottenuto che $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$ e
 $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$. Quindi esistono almeno
 due orbite periodiche di periodo 2.

$$\mathcal{O}_1 = \{0, \frac{1}{2}\}, \quad \mathcal{O}_2 = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$$

Inoltre $f(1) = \frac{1}{2}$, quindi possiamo disegnare il grafico
 approssimativo di f^2 .



Abbiamo visto che $f([0, \frac{1}{4}]) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $f([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) = [0, \frac{1}{4}]$,
 $f([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) = [\frac{3}{4}, 1]$ e $f([\frac{3}{4}, 1]) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,
 e $(\frac{d}{dx} f^2)(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$. Ricerchiamo che
 $\frac{d}{dx} f^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ e inoltre possiamo mostrare che
non ci sono altri punti fissi di f^2 oltre a $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Inoltre:

$$f^2(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi f(x)) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi f(x)) & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} =$$

$$= x + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x + \sin(4\pi x)) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Quindi

$$f^2(x) = x \iff \frac{1}{4\pi} \left[\sin(4\pi x) + \sin(4\pi x + \sin(4\pi x)) \right] = 0$$

$$\iff \frac{1}{4\pi} \sin\left(4\pi x + \frac{1}{2} \sin(4\pi x)\right) \cos\left(\frac{1}{2} \sin(4\pi x)\right) = 0$$

Poiché $x \in [0, 1)$ si ha $\frac{1}{2} \sin(4\pi x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, quindi $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$ implica $\cos\left(\frac{1}{2} \sin(4\pi x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1)$.

Inoltre $g(x) = 4\pi x + \frac{1}{2} \sin(4\pi x)$ è una funzione crescente su $[0, 1)$ essendo $g'(x) = 4\pi + 2\pi \cos(4\pi x)$, e si ha $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{4}) = \pi$, $g(\frac{1}{2}) = 2\pi$, $g(\frac{3}{4}) = 3\pi$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4\pi$. Quindi $\sin(g(x)) = 0$ su $[0, 1)$ $\iff x \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

Per quanto riguarda la stabilità delle orbite periodiche, possiamo calcolare

$$\frac{d}{dx} f^2(0) = f'(0) f'(\frac{1}{2}) = 4 = \frac{d}{dx} f^2(\frac{1}{2})$$

$$\frac{d}{dx} f^2(\frac{1}{4}) = f'(\frac{1}{4}) f'(\frac{3}{4}) = 0 = \frac{d}{dx} f^2(\frac{3}{4})$$

(abbiamo visto che $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f'(x) = 2$)

Quindi ν_1 è repulsiva mentre ν_2 è attrattiva.

(b) Poiché $f([0, \frac{1}{2})) = [\frac{1}{2}, 1)$ e $f([\frac{1}{2}, 1)) = [0, \frac{1}{2})$, non possono esistere orbite periodiche di periodo dispari.

Quindi se f avesse un'orbita di periodo $2k$ con $k > 1$, allora f^2 avrebbe un'orbita di periodo $k > 1$. Questo è impossibile in quanto f^2 è invertibile e crescente su $[0, 1)$, e $f^2(1) = 0$, $f^2(0) = 0$.

Quindi non ci sono orbite periodiche di f di periodo $n > 2$.

(c) Inanzitutto abbiamo determinato che

$$\left[\begin{array}{l} \omega(0) = \omega(\frac{1}{2}) = \omega(1) = \mathcal{I}_1 \\ \omega(\frac{1}{4}) = \omega(\frac{3}{4}) = \mathcal{I}_2 \end{array} \right]$$

Dai risultati del punto (a) e (b) possiamo dedurre che tutti gli altri punti verranno attratti da $\mathcal{I}_2$, quindi

$$\omega(x) = \mathcal{I}_2 \quad \forall x \neq \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$$