Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 18-09-2025

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\, x + 6y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in (0, +\infty)$.

(a) Nel caso $\mu \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, disegnare il ritratto di fase.

(b) Nel caso $\mu = 1$, determinare un integrale primo (porre $X = -(x + y)$, $Y = y$).

Esercizio 2. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (3x^2 + 3y^2 + xy)\Big(x\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2y\Big) - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big(x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + 2y\Big) \\ \dot{y} = (3x^2 + 3y^2 + xy)\Big(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 2x\Big) - (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y - 2x\Big) \end{cases}$$

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} -4x + 1, & \text{se} \quad x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}]; \\ 4x - 1, & \text{se} \quad x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ -\lambda x + \frac{1}{2}\lambda + 1, & \text{se} \quad x \in J_3 = [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

per $\lambda \in (0, 2]$.

(a) Si studi la stabilità dei punti fissi del sistema al variare di λ.

(b) Si costruisca, al variare di λ, l'f_λ-grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2, J_3\}$.

(c) Si discuta l'esistenza di un ferro di cavallo per f_λ e lo si esibisca quando possibile.
(Facoltativo: discutere la variazione dell'entropia topologica del sistema al variare di λ)

$\boxed{\text{ESERCIZIO } 1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 6y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}, \quad \mu \in (0, +\infty)$$

$\boxed{(a)}$ Sia $\mu \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$.

- Identifichiamo i punti fissi del sistema, soluzioni di

$$\begin{cases} \mu x + 6y^3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trova $y = -x$. Sostituendo nella prima, otteniamo $-6x^3 + \mu x = 0 \iff x(\mu - 6x^2) = 0$. Quindi i punti fissi sono:

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = \left(\sqrt{\tfrac{\mu}{6}}, -\sqrt{\tfrac{\mu}{6}}\right), \quad P_3 = \left(-\sqrt{\tfrac{\mu}{6}}, \sqrt{\tfrac{\mu}{6}}\right)$$

Studiamone la stabilità. Abbiamo

$$JF(P) = \begin{pmatrix} \mu & 18y^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mu a = \mu a$
$-a - b = \mu b$
$-a = (\mu+1) b$

- $P_1 = (0,0)$. Si ha $JF(P_1) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\det JF(P_1) = -\mu < 0$,

e quindi P_1 è un punto iperbolico instabile di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_1)$ sono $\lambda_1 = \mu$, con autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} \mu+1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e $\lambda_2 = -1$, con autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $P_2 = \left(\sqrt{\tfrac{\mu}{6}}, -\sqrt{\tfrac{\mu}{6}}\right)$. Si ha $JF(P_2) = \begin{pmatrix} \mu & 3\mu \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\det JF(P_2) = 2\mu > 0$ e $\operatorname{tr} JF(P_2) = \mu - 1$.

Inoltre $(\operatorname{tr} JF(P_2))^2 - 4 \det JF(P_2) = (\mu-1)^2 - 8\mu = \mu^2 - 10\mu + 1$, e

$$\mu^2 - 10\mu + 1 \begin{cases} > 0, & \mu \in (0, 5-2\sqrt{6}) \cup (5+2\sqrt{6}, +\infty) \\ = 0, & \mu = 5 \pm 2\sqrt{6} \\ < 0, & \mu \in (5-2\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6}) \end{cases}$$

Quindi: - se $\mu \in (0, 5-2\sqrt{6})$, P_2 è un punto iperbolico di tipo nodo e asintoticamente stabile

- se $\mu = 5-2\sqrt{6}$, $JF(P_2)$ ha autovalore $\lambda = 2-\sqrt{6} < 0$ che ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Quindi P_2 è un punto iperbolico di tipo nodo improprio e asintoticamente stabile;
- se $\mu \in (5-2\sqrt{6}, 1)$, P_2 è un punto iperbolico di tipo fuoco stabile;
- se $\mu \in (1, 5+2\sqrt{6})$, P_2 è un punto iperbolico di tipo fuoco instabile;
- se $\mu = 5+2\sqrt{6}$, P_2 è un punto iperbolico di tipo nodo improprio instabile;
- se $\mu \in (5+2\sqrt{6}, +\infty)$, P_2 è un punto iperbolico di tipo nodo instabile.

- $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{\mu}{6}}, \sqrt{\frac{\mu}{6}}\right)$. Ha lo stesso comportamento di P_2.

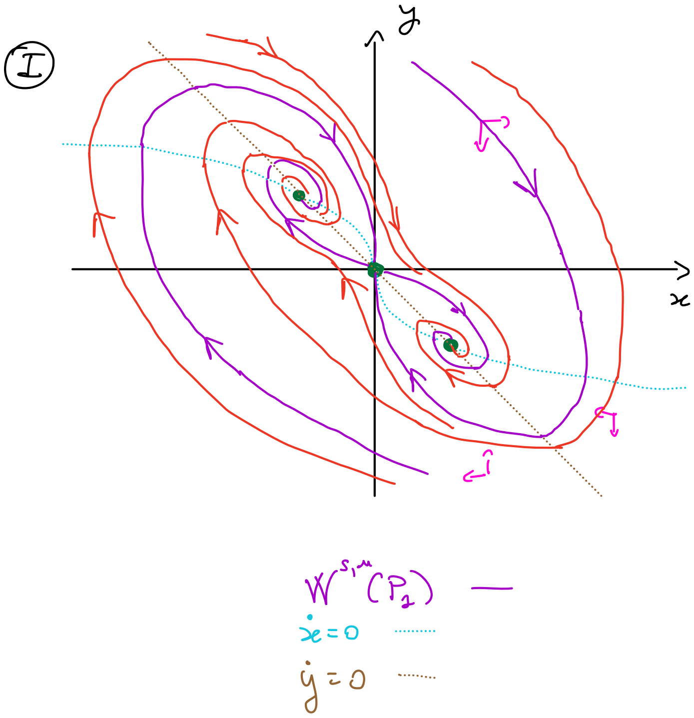
- Simmetrie. Per ogni $\mu > 0$, il sistema è simmetrico rispetto all'origine. Se poniamo $S(x,y) = (-x,-y)$, si ha
$$dS(F(x,y)) = (-\mu x - 6y^3, x+y) = F(S(x,y))$$
Quindi, se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche
$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$$

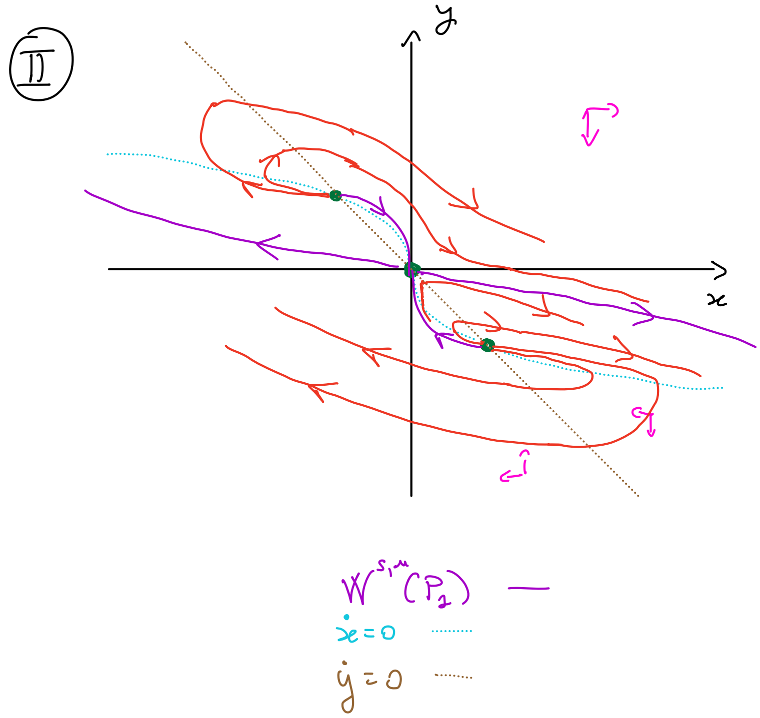
- Orbite periodiche. Poiché $\operatorname{div} F(x,y) = \mu - 1$ è a segno costante su $\mathbb{R}^2$ $\forall \mu \neq 1$, le orbite periodiche non possono esistere per il criterio di Bendixson–Dulac.

- Rette invarianti. Non esistono. Infatti, se $I(x,y) = ax+by$ con $a,b \in \mathbb{R}$, si trova per $c \in \mathbb{R}$
$$\dot{I}(x,y)\Big|_{I(x,y)=c} = a(\mu x + 6y^3) + b(-x-y)\Big|_{ax+by=c} =$$
$$= (a\mu - b)x - by + 6ay^3\Big|_{ax+by=c}.$$
Quindi, se $a \neq 0$, $\dot{I}(x,y)\Big|_{x=\frac{c-by}{a}} = \frac{(a\mu-b)}{a}(c-by) - by + 6ay^3$, che non si può annullare $\forall y$. Se, $a=0$, $\dot{I}(x,y)\Big|_{by=c} = -bx - c$, che di nuovo

si annulla $\forall x$ solo se $b=c=0$.

- Ritratti di fase. Utilizziamo il segno del campo e disegniamo il ritratto di fase in due casi: (I) $\mu \in (5-2\sqrt{6}, 1)$; (II) $\mu > 5+2\sqrt{6}$.





$\boxed{\text{(b)}}$ Sia $\mu=1$. Poniamo $X=-(x+y)$ e $Y=y$. Si trova

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dot{x}-\dot{y} = -x-6y^3+x+y = Y-6Y^3 \\ \dot{Y} = \dot{y} = -x-y = X \end{cases}$$

Il sistema si può scrivere come un sistema hamiltoniano della forma

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{\partial H}{\partial Y}(X,Y) \\ \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial X}(X,Y) \end{cases} \quad \text{con} \quad H(X,Y) = \frac{1}{2}Y^2 - \frac{3}{2}Y^4 - \frac{1}{2}X^2$$

Quindi $H(X,Y)$ è un integrale primo, e possiamo scrivere

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}y^4 - \frac{1}{2}(-x-y)^2 = -\frac{3}{2}y^4 - \frac{1}{2}x^2 - xy$$

Verifichiamo che $\dot{H}(x,y) \equiv 0$

$$\dot{H}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = (-x-y)(x+6y^3) + (-6y^3-x)(-x-y) \equiv 0.$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = (3x^2+3y^2+xy)\left(x\sqrt{x^2+y^2}-2x-2y\right)-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\left(x\sqrt{x^2+y^2}-2x+2y\right) \\ \dot{y} = (3x^2+3y^2+xy)\left(x\sqrt{x^2+y^2}-2y+2x\right)-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\left(x\sqrt{x^2+y^2}-2y-2x\right) \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ).

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(x\dot{x}+y\dot{y})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[(3\rho^2+\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)(\rho^3-2\rho^2)-\rho^3(\rho^3-2\rho^2)\right] =$$

$$= \rho^3(\rho-2)(3+\cos\vartheta\sin\vartheta-\rho)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2}(x\dot{y}-y\dot{x})\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[(3\rho^2+\rho\cos\vartheta\sin\vartheta)(2\rho^2)-\rho^3(-2\rho^2)\right] =$$

$$= 2\rho^2(3+\cos\vartheta\sin\vartheta+\rho)$$

Dunque, il sistema in coordinate polari è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^3(\rho-2)(3+\cos\vartheta\sin\vartheta-\rho) \\ \dot{\vartheta} = 2\rho^2(3+\cos\vartheta\sin\vartheta+\rho) \end{cases}$$

Il punto $P=(0,0)$ in coordinate euclidee è fisso, ed è l'unico. Infatti, un punto Q diverso dall'origine è fisso se e solo se annulla il campo di vettori in coordinate polari. Ma poiché $3+\cos\vartheta\sin\vartheta+\rho \geq 3-\frac{1}{2}$ $\forall(\rho,\vartheta)$ con $\rho>0$, è chiaro che $\dot{\vartheta}>0$ $\forall\rho>0$.

Osserviamo poi che $\dot{\rho}\big|_{\rho=2}=0$ $\forall\vartheta$, quindi l'insieme $\Gamma_1=\{x^2+y^2=4\}$ è invariante e costituisce un'orbita periodica.

Inoltre vale che:

- se $\rho\in(0,2)$, $\dot{\rho} \leq \rho^3(\rho-2)\left(3-\frac{1}{2}-2\right) = \frac{1}{2}\rho^3(\rho-2) < 0$;
- se $\rho>2$, $\dot{\rho}>0 \iff 3+\cos\vartheta\sin\vartheta-\rho>0$. E:

se $\rho \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$ si ha $3 + \cos\vartheta \sin\vartheta - \rho > 0$;

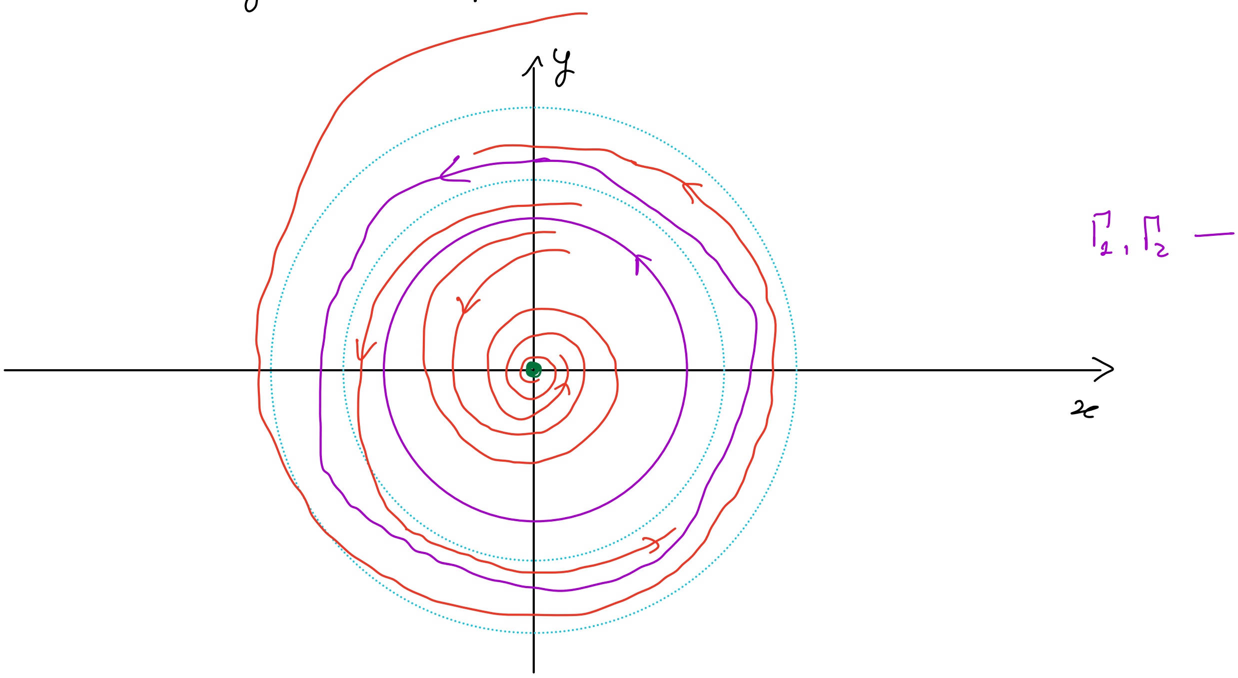
se $\rho > \frac{7}{2}$ si ha $3 + \cos\vartheta \sin\vartheta - \rho < 0$.

Quindi possiamo applicare il Teorema di Poincaré-Bendixson alla corona circolare

$$D = \{ (x,y) \;/\; \rho_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq \rho_1^2 \} \quad \text{con } \rho_0 \in \left(2, \tfrac{5}{2}\right),\ \rho_1 > \tfrac{7}{2}.$$

e troviamo l'esistenza di una seconda orbita periodica Γ_2 in D.

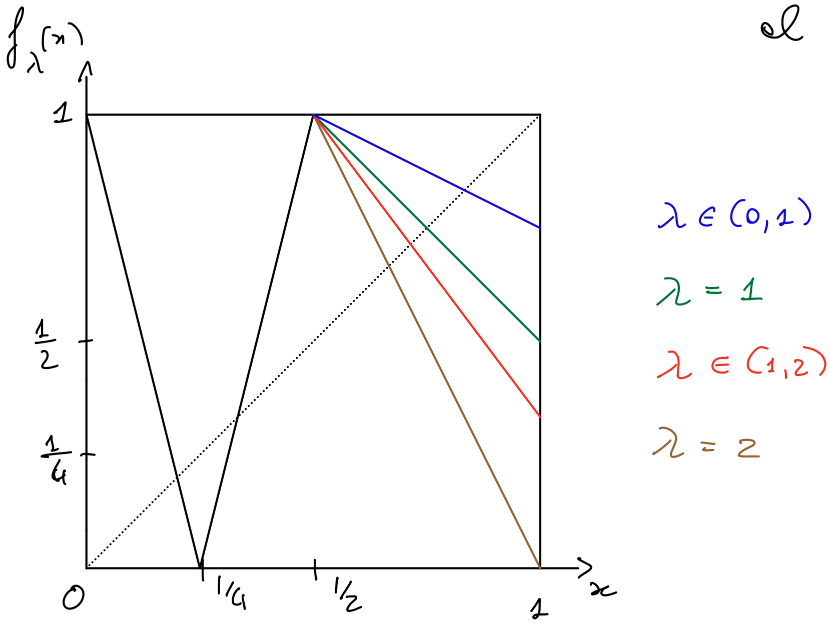
Il ritratto di fase è dunque



ESERCIZIO 3

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} -4x+1, & \text{se } x \in J_1 = [0, 1/4] \\ 4x-1, & \text{se } x \in J_2 = [1/4, 1/2] \\ -\lambda x + \frac{1}{2}\lambda + 1, & \text{se } x \in J_3 = [1/2, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 2]$



$\boxed{\text{(a)}}$

Per ogni $\lambda \in (0,2]$, f_λ ha esattamente tre punti fissi:

$$x_1 = \frac{1}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{\lambda+2}{2\lambda+2}$$

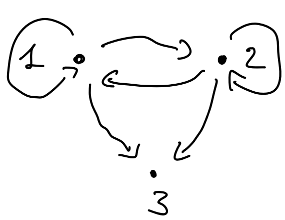
- $x_1 = \frac{1}{5}$. Si ha $|f_\lambda'(x_1)| = 4 \ \forall \lambda$, dunque x_1 è repulsivo.
- $x_2 = \frac{1}{3}$. Si ha $|f_\lambda'(x_2)| = 4 \ \forall \lambda$, dunque x_2 è repulsivo.
- $x_3 = \frac{\lambda+2}{2\lambda+2}$. Si ha $|f_\lambda'(x_3)| = \lambda$. Quindi:
  - se $\lambda \in (0,1)$, x_3 è attrattivo;
  - se $\lambda \in (1,2]$, x_3 è repulsivo;
  - se $\lambda = 1$, si vede che $(f_\lambda|_{J_3})^2 = \mathrm{Id}$, quindi x_3 è stabile ma non attrattivo.

$\boxed{\text{(b)}}$

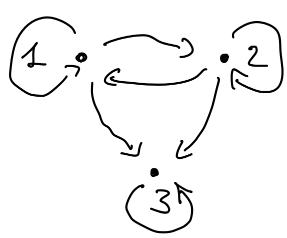
Abbiamo che $f_\lambda(J_1) = f_\lambda(J_2) = [0,1] = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \quad \forall \lambda \in (0,2]$,
mentre $f_\lambda(J_3) \subsetneq J_3$ se $\lambda \in (0,1)$, $f_\lambda(J_3) = J_3$ se $\lambda = 1$,
$f_\lambda(J_3) \supset J_3$ ma $J_2 \not\subset f_\lambda(J_3)$ per $\lambda \in (1, \frac{3}{2})$,
$f_\lambda(J_3) = J_2 \cup J_3$ se $\lambda = \frac{3}{2}$, $f_\lambda(J_3) \supset J_2 \cup J_3$ ma $J_1 \not\subset f_\lambda(J_3)$ se $\lambda \in (\frac{3}{2}, 2)$,
e infine $f_\lambda(J_3) = [0,1] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ se $\lambda = 2$.

Quindi:

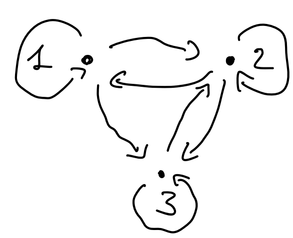
$\lambda \in (0,1)$



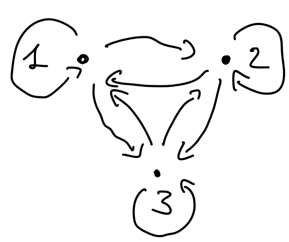
$\lambda \in [1, \frac{3}{2})$



$\lambda \in [\frac{3}{2}, 2)$



$\lambda = 2$



$\boxed{(c)}$ Si consideri $J = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$. Vale $f_\lambda\left(\frac{1}{6}\right) = f_\lambda\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ $\forall \lambda$. Inoltre $\frac{1}{4} \in J$ e $f_\lambda\left(\frac{1}{4}\right) = 0 < \frac{1}{6}$ $\forall \lambda$. Quindi $\exists$ $\bar{x} \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ e $\bar{\bar{x}} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ t.c. $f_\lambda(\bar{x}) = f_\lambda(\bar{\bar{x}}) = \frac{1}{6}$. Segue che $K_1 = \left(\frac{1}{6}, \bar{x}\right)$ e $K_2 = \left(\bar{\bar{x}}, \frac{1}{3}\right)$ verificano $\overline{K_1}, \overline{K_2} \subset J$ e $f_\lambda(\overline{K_1}) = f_\lambda(\overline{K_2}) = J$.

Quindi J è un ferro di cavallo per f_λ $\forall \lambda$.

(Per un teorema noto, si ha $h_{top}(f_2) = \log 3$. Se $\lambda \in (0,1]$, si può dimostrare che il numero di orbite "distinguibili" cresce come una potenza di 2, dunque $h_{top}(f_\lambda) = \log 2$).