

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 18-09-2023

Esercizio 1. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu x^3 \\ \dot{y} = 2x + 2y - x^2 \end{cases}$$

- (a) per $\mu = 0$, si disegni il ritratto di fase e si determini l'insieme dei punti il cui ω -limite è $\{(0, 0)\}$;
- (b) per $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si discuta l'esistenza di orbite periodiche.

Esercizio 2. (12 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{2}\mu x + 5y + x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \\ \dot{y} = \mu y - 5x + y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \end{cases}$$

- (a) per $\mu = 0$, si disegni il ritratto di fase;
- (b) si dimostri che esistono valori di $\mu \neq 0$ per cui esiste almeno un'orbita periodica;
- (c) dire se esistono valori di $\mu \in \mathbb{R}$ per cui non esistono orbite periodiche.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $\alpha \in (0, 1]$ data da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} -3\alpha x + \alpha, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ 3x - 1, & \text{for } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}; \\ -3\alpha x + 2\alpha + 1, & \text{for } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Si caratterizzino i punti fissi della mappa f_α .
- (b) Si discuta la caoticità della mappa per $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- (c) Esiste un parametro $\alpha \in (0, 1]$ per il quale valga $h_{top}(f_\alpha) > \log 2$?

ESERCIZIO
1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu x^3 \\ \dot{y} = 2x + 2y - x^2 \end{cases}$$

(a) $\mu = 0$ Il sistema ha un solo punto fisso $P = (0, 0)$.

Calcoliamo $JF(P) = JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $\det JF(P) = 0$

e di conseguenza P è punto fisso non iperbolico.

Cerchiamo insiemi invarianti.

Si ricava che l'insieme $A_1 = \{x=0\}$ è invariante, come dimostra il fatto che per $I_1(x, y) = x$ si ha $\nabla I_1 \neq (0, 0) \forall (x, y) \in A_1$ e $\dot{I}_1(x, y)|_{A_1} = \dot{x}|_{A_1} \equiv 0$.

Cerchiamo altre rette invarianti della forma $ax + by = c$ con $b \neq 0$.

Poniamo $I_2(x, y) = ax + by - c$. Si ha

$$\dot{I}_2(x, y)|_{I_2=0} = a\dot{x} + b\dot{y}|_{I_2=0} = ax^2 + b(2x + 2y - x^2)|_{y = \frac{c-ax}{b}} = (a-b)x^2 + 2bx + 2b\frac{c-ax}{b} =$$

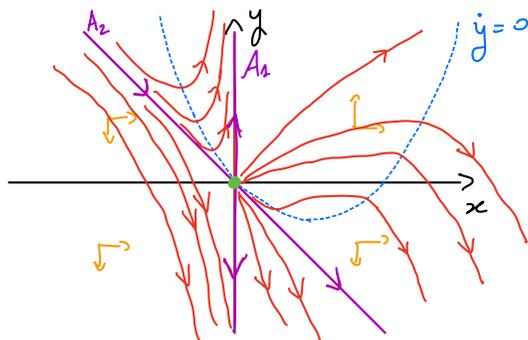
$$= (a-b)x^2 + 2(b-a)x + 2c$$

Quindi $\dot{I}_2(x, y)|_{I_2=0} \equiv 0 \Leftrightarrow a=b$ e $c=0$. Troviamo l'insieme invariante

$$A_2 = \{x + y = 0\}.$$

Infine, poiché le rette invarianti passano per il punto fisso P , la teoria dell'indice di Poincaré e l'unicità locale delle soluzioni implicano che non ci sono orbite periodiche.

Disegniamo un possibile ritratto di fase utilizzando anche il segno del campo.



Troviamo quindi che

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : w(x,y) = \{(0,0)\}\} = \{x+y=0, x \leq 0\}$$

(a) $\mu \neq 0$

Le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x^2 + \mu x^3 = 0 \\ 2x + 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$
 sono i due punti fissi

$$\underline{P_1 = (0,0) \quad , \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{2\mu} + 1\right)\right)}$$

Per la teoria dell'indice di Poincaré sappiamo che è utile sapere che tipo di punti fissi sono.

Come prima, poiché
$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2x + 3\mu x^2 & 0 \\ 2 - 2x & 2 \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
, il punto fisso

P_1 è non iperbolico, ma ovviamente $A_1 = \{x=0\}$ è invariante. Quindi non possono esistere orbite periodiche che circondano P_1 .

Si ne deduce che possono esistere solo orbite periodiche che circondano P_2 e interamente contenute nel semipiano $\{x > 0\}$ se $-\frac{1}{\mu} > 0$ o $\{x < 0\}$ se $-\frac{1}{\mu} < 0$.

Consideriamo

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} 2x + 3\mu x^2 & 0 \\ 2 - 2x & 2 \end{pmatrix} \Big|_{x = -\frac{1}{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 2 + \frac{3}{\mu} & 2 \end{pmatrix}.$$

Se $-\frac{1}{\mu} > 0$, o $\underline{\mu < 0}$, si ha che $\det JF(P_2) = \frac{2}{\mu} < 0$. Quindi P_2 è un punto di sella, e per la teoria dell'indice di Poincaré, non possono esistere orbite periodiche.

Se $-\frac{1}{\mu} < 0$, o $\underline{\mu > 0}$, il punto P_2 è un punto di tipo nodo instabile. Ma $\dot{x} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{\mu}$ e $x \neq 0$, quindi un'orbita periodica non può circondare P_2 .

Ne segue che anche in questo caso non possono esistere orbite periodiche.

ESERCIZIO
2

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{2}\mu x + 5y + x(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2) \\ \dot{y} = \mu y - 5x + y(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2) \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ) .

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x\dot{x} + y\dot{y}) \Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{3}{2}\mu x^2 + 5xy + x^2(\rho-1)(\rho-2) + \mu y^2 - 5xy + y^2(\rho-1)(\rho-2) \right] \\ \quad = \mu\rho \left(1 + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta \right) + \rho(\rho-1)(\rho-2) \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta}} = \frac{1}{\rho^2} \left[\mu xy - 5x^2 + xy(\rho-1)(\rho-2) - \frac{3}{2}\mu xy - 5y^2 - xy(\rho-1)(\rho-2) \right] \\ \quad = -5 - \frac{1}{2}\mu \sin\vartheta \cos\vartheta \end{cases}$$

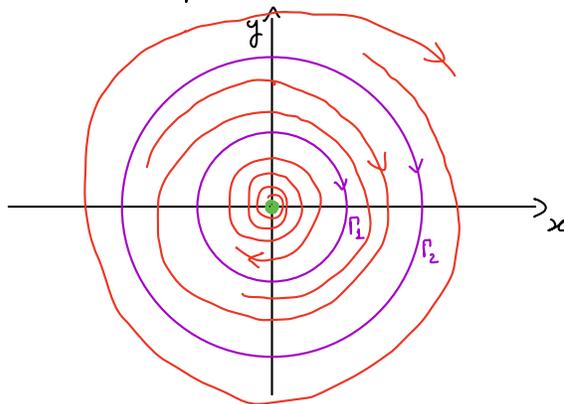
(a) $\mu = 0$ Il sistema è quindi $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\rho-1)(\rho-2) \\ \dot{\vartheta} = -5 \end{cases}$

Le due equazioni non sono accoppiate e il sistema è facile da studiare.

Ci sono un punto fisso $P=(0,0)$ e due orbite periodiche $\Gamma_1 = \{x^2+y^2=1\}$, $\Gamma_2 = \{x^2+y^2=4\}$.

Γ_1 è orbitale e orbitalmente stabile, mentre Γ_2 è instabile.

Poiché $\dot{\vartheta} = -5$, le orbite sono percorse in senso orario.



(b) $\mu \neq 0$ Applichiamo il Teorema di Poincaré-Bendixonson e quindi cerchiamo un insieme compatto D che non contenga punti fissi e per cui $\exists (x_0, y_0)$ per il quale $\exists t_0 > 0$ t.c. $\phi(t, (x_0, y_0)) \in D \forall t \geq t_0$.

L'insieme più semplice da considerare è una corona circolare della forma

$D = \{ \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \}$ e chiediamo che:

(i) $\dot{\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} > 0$;

(ii) $\dot{\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} < 0$;

(ii) D non contiene punti fissi.

Per (i) poniamo $\rho = \frac{1}{2}$ per il quale per $\mu = 0$ si ha $\dot{\rho}|_{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{8} > 0$.

Abbiamo $\dot{\rho}|_{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} + \frac{\mu}{2} (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta) \geq \frac{3}{8} + \frac{\mu}{2} > 0 \quad \forall \mu > 0$

Per (ii) poniamo $\rho = \frac{3}{2}$ per il quale per $\mu = 0$ si ha $\dot{\rho}|_{\rho=\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$.

Abbiamo $\dot{\rho}|_{\rho=\frac{3}{2}} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\mu (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta) \leq -\frac{3}{8} + \frac{9}{4}\mu < 0 \quad \forall \mu \in (0, \frac{1}{6})$

Per (iii), studiando $\dot{\rho}$ con $\rho \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vale

$$-5 - \frac{1}{2} \mu \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \leq -5 + \frac{\mu}{4} < 0 \quad \forall \mu \in (0, 20)$$

e $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$.

Donque $D = \{\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{3}{2}\}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixon $\forall \mu \in (0, \frac{1}{6})$. Per questi valori di μ esiste quindi un'orbita periodica.

(c) Una condizione sufficiente per la non esistenza di un'orbita periodica è che $\dot{\rho} > 0 \quad \forall (\rho, \vartheta)$.

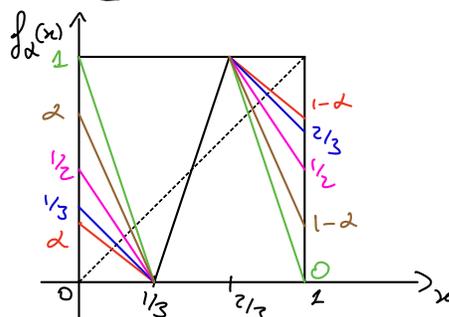
Usando $\dot{\rho} = \mu \rho (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta) + \rho(\rho-1)(\rho-2) \geq \rho [(\rho-1)(\rho-2) + \mu] \quad \forall \mu > 0$
 e $\forall (\rho, \vartheta)$, e osservando che $\min_{\rho} (\rho-1)(\rho-2) = -\frac{1}{4}$, se $\mu > \frac{1}{4}$ si ha $\dot{\rho} \geq \rho [(\rho-1)(\rho-2) + \mu] > 0 \quad \forall (\rho, \vartheta)$.

Quindi per questi valori di μ il sistema non ammette orbite periodiche.

ESERCIZIO
3

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} -3\alpha x + \alpha, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 3x - 1, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ -3\alpha x + 2\alpha + 1, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}, \quad \alpha \in (0, 1]$$

Disegniamo il grafico di f_{α} per alcuni valori di $\alpha \in (0, 1]$



$\alpha \in (0, \frac{1}{3})$
 $\alpha = \frac{1}{3}$
 $\alpha = \frac{1}{2}$
 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
 $\alpha = 1$

(a)

Per ogni $\alpha \in (0, 1]$ la mappa f_α ha tre punti fissi

$$x_1 \in (0, \frac{1}{3}) \text{ soluzione di } -3\alpha x + \alpha = x \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{3\alpha + 1}$$

$$x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \quad " \quad " \quad 3x - 1 = x \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 \in (\frac{2}{3}, 1) \quad " \quad " \quad -3\alpha x + 2\alpha + 1 = x \Rightarrow x_3 = \frac{2\alpha + 1}{3\alpha + 1}$$

Per caratterizzarli possiamo studiare il valore di $|f'_\alpha(x_i)|$.

x_1 . Si ha $|f'_\alpha(x_1)| = 3\alpha$, dunque:

se $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$, x_1 è attrattivo;

se $\alpha = \frac{1}{3}$, x_1 non è iperbolico, e $f_\alpha(m)|_{(0, \frac{1}{3})} = -x + \frac{1}{3}$, $f_\alpha^2(m)|_{(0, \frac{1}{3})} = x$.

Quindi x_1 è l'equivalente di un punto stabile ma non asintoticamente stabile;

se $\alpha \in (\frac{1}{3}, 1]$, x_1 è repulsivo.

x_2 . Si ha $|f'_\alpha(x_2)| = 3$, dunque x_2 è repulsivo $\forall \alpha \in (0, 1]$.

x_3 . Si vede che valgono gli stessi risultati trovati per x_1 .

(b)

Se $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha che $f_\alpha(0) = \alpha \geq \frac{1}{2}$, $f_\alpha(\frac{1}{3}) = 0$, $f_\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Dunque l'intervallo $J = [0, \frac{1}{2}]$ ricopre se stesso due volte, con

$K_1 = (\frac{\alpha - \frac{1}{2}}{3\alpha}, \frac{1}{3})$, $K_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, e quindi f_α ha un ferro di cavallo.

Di conseguenza f_α è caotico $\forall \alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(c)

Ci aspettiamo che le mappe mostrino un comportamento caotico più "eccitato" per valori più grandi di α (α più grande corrisponde ad espansione più grande).

Poniamo quindi $\alpha = 1$. La mappa diventa simile ad una mappa tenda con tre seni.

Possiamo ragionare in diversi modi per calcolare $\text{hop}(f_1)$. Possiamo stimare la cardinalità degli insiemi (ϵ, ϵ) -separati (fatto nelle note per la mappa tenda), oppure usare la partizione

$J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$ e la matrice di transizione tra di loro.

Si trova

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad M^m = \begin{pmatrix} 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Per cui $h_{\text{top}}(f_1) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log(\text{tr } M^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \log 3^m = \log 3.$

Dunque per $\alpha=1$ si viene $h_{\text{top}}(f_1) > \log 2.$