

Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 15-09-2026

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log(2x+1)}$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D .

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 - 1}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+1}, & \text{se } x > 0, \\ 1, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$e^x + 3x \geq 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e scarto quadratico medio del campione.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Dire se esiste l'inversa della seguente matrice A e, in caso positivo, determinarla con le mosse di Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Determinare le soluzioni del seguente sistema con le mosse di Gauss:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \\ -x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Svolgimento

Esercizio 1. Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 > 0, \log(2x + 1) \neq 0\}.$$

Poiché

$$2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$$

e

$$\log(2x + 1) = 0 \iff 2x + 1 = 1 \iff x = 0,$$

si ha

$$D = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

Gli estremi di D sono $-\frac{1}{2}$, 0 e $+\infty$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{\log(2x + 1)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\log(2x + 1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(2x + 1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(2x + 1)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

Esercizio 2. Il dominio naturale di f è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Verifichiamo l'esistenza di eventuali asintoti a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty \cdot 3 = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Calcoliamo

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 3$$

e

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3 + x}{x^2 - 1} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x - 3x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \frac{4}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da

$$\boxed{y = 3x}.$$

Esercizio 3. La funzione f è continua in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, essendo definita in tali intervalli mediante funzioni continue. Studiamo la continuità nel punto $x = 0$. Si ha

$$f(0) = 1,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2+1} = 2.$$

Poiché i due limiti laterali esistono e sono finiti, ma sono diversi, $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

Quindi l'insieme dei punti di continuità di f è

$$\boxed{C = \mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

Esercizio 4. La disequazione può essere riscritta come

$$e^x \geq 1 - 3x.$$

Poniamo

$$f(x) = e^x \quad \text{e} \quad g(x) = 1 - 3x.$$

Il grafico di f è il grafico noto della funzione esponenziale. Per disegnare il grafico di g , partiamo dal grafico noto della funzione

$$y = -3x$$

e lo trasliamo verticalmente verso l'alto di 1. Otteniamo così il grafico della retta

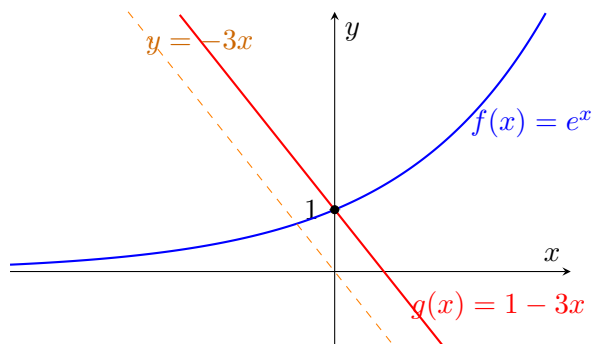
$$g(x) = 1 - 3x.$$

Dal grafico si osserva che

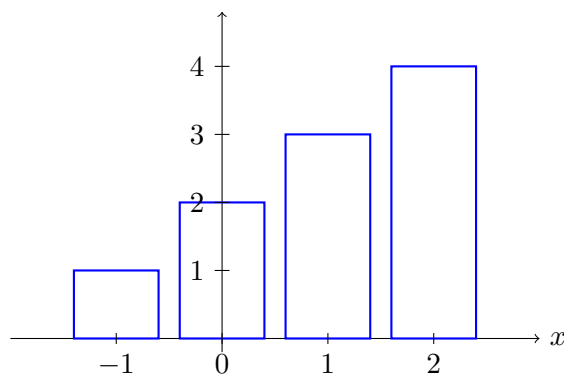
$$f(x) \geq g(x)$$

se e solo se $x \geq 0$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$\boxed{[0, +\infty)}.$$



Esercizio 5. L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N = 10$, e gli x_i sono i dati. Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (-1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2) = \frac{10}{10} = 1.$$

Lo scarto quadratico medio $\sigma(x)$ del campione si calcola come

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)},$$

dove $\text{var}(x)$ è la varianza del campione, che si può calcolare come

$$\text{var}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \frac{1}{10} ((-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2) - 1^2 \\ &= \frac{20}{10} - 1 = 1. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)} = 1}.$$

Esercizio 6. Sia

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Il vettore w è ortogonale a v_1 e a v_2 se

$$\begin{cases} ky + z = 0, \\ 2x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Scambiando le due righe e dividendo la prima riga per 2, si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Se $k \neq 0$, mediante le mosse

$$C_2 \leftarrow \frac{1}{k}C_2, \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2,$$

si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 - \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k} & 0 \end{array} \right).$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x - \left(1 + \frac{1}{k}\right)z = 0, \\ y + \frac{1}{k}z = 0. \end{cases}$$

Ponendo $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$x = \left(1 + \frac{1}{k}\right)t, \quad y = -\frac{1}{k}t, \quad z = t.$$

Quindi

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Se $k = 0$, la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

dove è stata eseguita la mossa

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2.$$

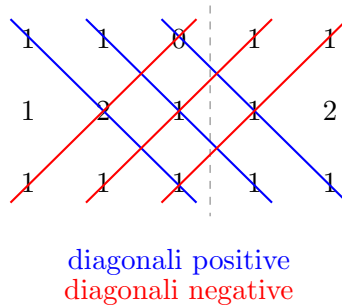
Il sistema è equivalente a

$$x + y = 0, \quad z = 0.$$

Ponendo $y = t$, si ottiene

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 7. Calcoliamo innanzitutto il determinante di A .



Pertanto

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 \\
 &\quad - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= 2 + 1 + 0 - 0 - 1 - 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Poiché

$$\det(A) = 1 \neq 0,$$

la matrice A è invertibile.

Per calcolare l'inversa con le mosse di Gauss, affianchiamo ad A la matrice identità:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Eseguiamo le mosse

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1,$$

dove con C_i indichiamo la i -esima riga. Si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Eseguiamo ora la mossa

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_3 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Infine, eseguendo

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2,$$

otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

A sinistra abbiamo ottenuto la matrice identità; quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Eseguiamo le mosse di Gauss

$$C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1, \quad C_3 \longleftarrow C_3 + C_1,$$

dove con C_i indichiamo la i -esima riga. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il sistema è quindi equivalente alla sola equazione

$$x + y + 2z = 1.$$

Le incognite y e z sono libere. Ponendo

$$y = s, \quad z = t, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

si ottiene

$$x = 1 - s - 2t.$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è il piano affine

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$