

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 15-06-2023

Esercizio 1. (12 punti) Per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y - 2y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

studiare la stabilità del punto fisso $P = (0, 0)$ nei casi:

- (a) $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- (b) $\mu = 2$.

Esercizio 2. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 + y \\ \dot{y} = \mu(3x - x^2) + 2y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$:

- (a) dire per quale valore μ la funzione $I(x, y) = 2x - y$ è un integrale primo del sistema;
- (b) determinare la tipologia dei punti fissi iperbolici del sistema al variare di $\mu \in \mathbb{R}$;
- (c) usando le informazioni dei due punti precedenti, disegnare un possibile ritratto di fase nei casi $\mu = -1, 2, 3$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} -3x + 1, & \text{se } x \in J_1 = [0, \frac{1}{3}]; \\ 3x - 1, & \text{se } x \in J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ -\lambda x + \frac{2}{3}\lambda + 1, & \text{se } x \in J_3 = [\frac{2}{3}, 1]; \end{cases}$$

per $\lambda \in (0, 3]$.

- (a) Si studi la stabilità dei punti fissi del sistema al variare di λ .
- (b) Si costruisca, al variare di λ , l' f_λ -grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2, J_3\}$.
- (c) Si discuta l'esistenza di un ferro di cavallo per f_λ e lo si esibisca quando possibile.
(Facoltativo: è possibile trovare una differenza quantitativa nel comportamento caotico delle mappe nei casi $\lambda = 1/3$ e $\lambda = 3$?)

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y - 2y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}, \quad P = (0, 0)$$

(a) Il punto $P = (0, 0)$ è fisso $\forall \mu \in \mathbb{R}$. Calcoliamo $JF(P)$.

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & \mu - 2 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \mu - 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\det JF(P) = \mu - 2$, $\text{tr} JF(P) = 0$. Ne segue che:

- se $\mu < 2$ allora $\det JF(P) < 0$, e P è un punto fisso iperbolico di tipo sella, quindi è instabile;
- se $\mu > 2$ invece $\det JF(P) > 0$, $\text{tr} JF(P) = 0$ implicano che P non è iperbolico.

Cerchiamo una funzione di Lyapunov per P .

Sia $V(x, y) = ax^{2m} + by^{2m}$ con $a, b > 0$, $m, m \in \mathbb{N}$. Si verifica quindi che $V(x, y) \geq V(0, 0) = V(P) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Calcoliamo $\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \dot{y}$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2ma x^{2m-1} (\mu y - 2y - x^3) + 2mb y^{2m-1} (-x - y^3) = \\ &= -2ma x^{2m+2} - 2mb y^{2m+2} + 2m(\mu - 2) a x^{2m-1} y - 2mb x y^{2m-1}. \end{aligned}$$

Vorremo eliminare i termini di segno incerto. Ponendo

$$2m(\mu - 2)a = 2mb, \quad 2m - 1 = 1, \quad 1 = 2m - 1$$

quindi $m = 1$, $m = 1$, e ad esempio $a = 1$, $b = \mu - 2$, si ha

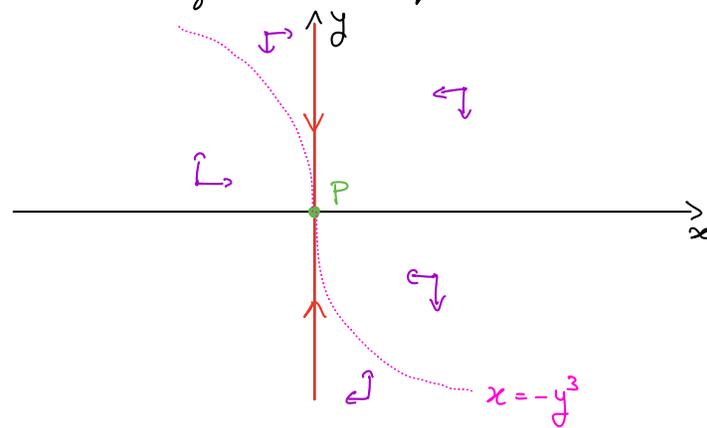
$$\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 2(\mu - 2)y^4 < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Quindi la funzione $V(x, y) = x^2 + (\mu - 2)y^2$ è funzione di Lyapunov stretta per P , che quindi è asintoticamente stabile per il secondo teorema di Lyapunov.

(b) Se $\mu = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

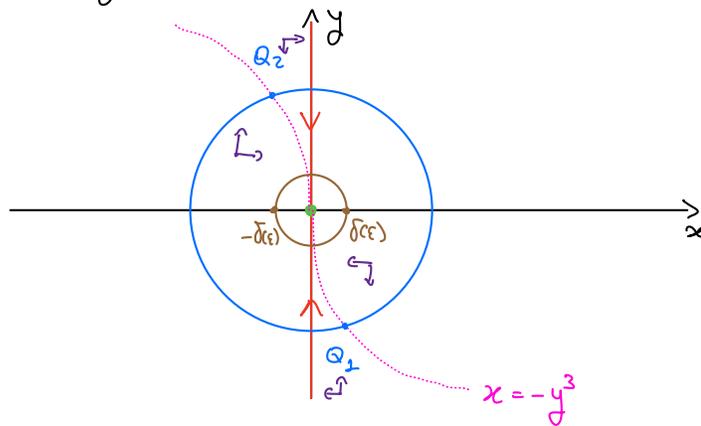
Osserviamo che $P=(0,0)$ è l'unico punto fisso del sistema. Studiamo il ritratto di fase. La retta $\{x=0\}$ è invariante poiché $I(x,y)=x$ verifica $\nabla I|_{\{x=0\}} \neq 0$ e $\dot{I}(x,y)|_{\{x=0\}} = \dot{x}|_{\{x=0\}} = 0$. Inoltre ricaviamo informazioni dal segno del campo.



Fissiamo $\varepsilon > 0$, esiste un unico $\delta(\varepsilon) > 0$ t.c. i punti

$$Q_1 = (\delta(\varepsilon), -(\delta(\varepsilon))^{1/3}), \quad Q_2 = (-\delta(\varepsilon), (\delta(\varepsilon))^{1/3})$$

si trovano su $\partial B_\varepsilon(0,0)$. Siamo identificando le due intersezioni tra $\partial B_\varepsilon(0,0)$ e $\{x=-y^3\}$.



Sia $(x_0, y_0) \in B_{\delta(\varepsilon)}(0,0)$. Dalle informazioni sul segno del campo ricaviamo che se $x_0 > 0 \exists \bar{t} > 0$ t.c. $\varphi(\bar{t}, (x_0, y_0)) \in \{x=-y^3\} \cap B_\varepsilon(0,0)$, e $\forall t > \bar{t} \varphi(t, (x_0, y_0)) \in \{x < -y^3\} \cap B_\varepsilon(0,0) \subset B_\varepsilon(0,0)$. Analogamente se $x_0 < 0$. Il caso $x_0 = 0$ è elementare per l'invarianza di $\{x=0\}$.

Abbiamo quindi mostrato che P è stabile.

In realtà, continuando il ragionamento si può dimostrare che $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \varphi(t, (x,y)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P$, e quindi P è asintoticamente stabile.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 + y \\ \dot{y} = \mu(3x - x^2) + 2y \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

(a) La funzione $I(x,y) = 2x - y$ è un integrale primo se $\dot{I}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \dot{I}(x,y) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \dot{y} = 2(3x - x^2 + y) - (\mu(3x - x^2) + 2y) \\ &= (2 - \mu)(3x - x^2) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \mu = 2 \end{aligned}$$

(b) Troviamo i punti fissi.

$$\begin{cases} 3x - x^2 + y = 0 \\ \mu(3x - x^2) + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ (\mu - 2)(3x - x^2) = 0 \end{cases}$$

Se $\mu = 2$, i punti fissi sono tutti i punti della parabola $\{y = x^2 - 3x\}$

Se $\mu \neq 2$, i punti fissi sono

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (3,0)$$

Poniamo $\mu \neq 2$. Calcoliamo $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3-2x & 1 \\ \mu(3-2x) & 2 \end{pmatrix}$ da cui:

- $P_1 = (0,0)$. Si ha $JF(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3\mu & 2 \end{pmatrix}$, $\det JF(0,0) = 6 - 3\mu$, $\text{tr} JF(0,0) = 5$.
Quindi se $\mu > 2$, $\det JF(0,0) < 0$ e P_1 è un punto iperbolico di tipo sella. Se $\mu < 2$, $\det JF(0,0) > 0$ e $\text{tr} JF(0,0) > 0$, quindi P_1 è un punto iperbolico instabile. Calcoliamo

$$\Delta = (\text{tr} JF(0,0))^2 - 4 \det JF(0,0) = 25 - 4(6 - 3\mu) = 1 + 12\mu.$$

Quindi se $\mu \in (-\frac{1}{12}, 2)$, P_1 è un nodo instabile,

se $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{12})$, P_1 è un fuoco instabile

se $\mu = -\frac{1}{12}$, P_1 è un nodo improprio instabile perché

$JF(P_1)|_{\mu = -\frac{1}{12}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalore $\lambda = \frac{5}{2}$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

- $P_2 = (3,0)$. Si ha $JF(3,0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3\mu & 2 \end{pmatrix}$, $\det JF(3,0) = -6 + 3\mu$, $\text{tr} JF(3,0) = -1$.

Quindi se $\mu < 2$, $\det JF(3,0) < 0$ e P_2 è un punto iperbolico di tipo

sella. Se $\mu > 2$, $\det JF(3,0) > 0$ e $\text{tr} JF(3,0) < 0$, quindi P_2 è un punto iperbolico stabile. Calcoliamo

$$\Delta = (\text{tr} JF(3,0))^2 - 4 \det JF(3,0) = 1 - 4(-6+3\mu) = 25 - 12\mu$$

Quindi se $\mu \in (2, \frac{25}{12})$, P_2 è un modo stabile,

se $\mu \in (\frac{25}{12}, +\infty)$, P_2 è un fuoco stabile

se $\mu = \frac{25}{12}$, P_2 è un modo improprio stabile perché

$JF(P_2)|_{\mu=\frac{25}{12}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{25}{4} & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalore $\lambda = -\frac{1}{2}$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

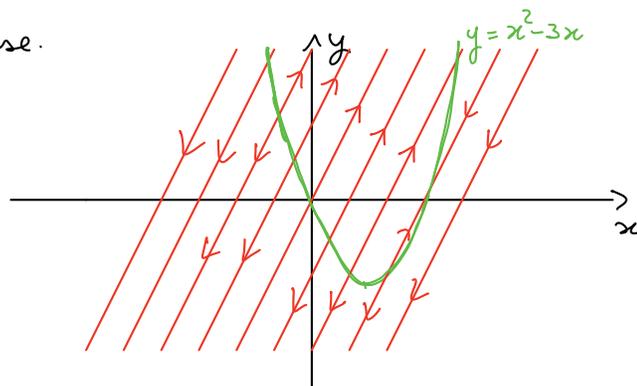
Consideriamo ora il caso $\mu = 2$. Poiché $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3-2x & 1 \\ 2(3-2x) & 2 \end{pmatrix}$ si ha

$\det JF(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, e dunque tutti i punti fissi risultano essere non iperbolici.

(c) Consideriamo prima il caso $\mu = 2$. Abbiamo in questo caso un integrale primo

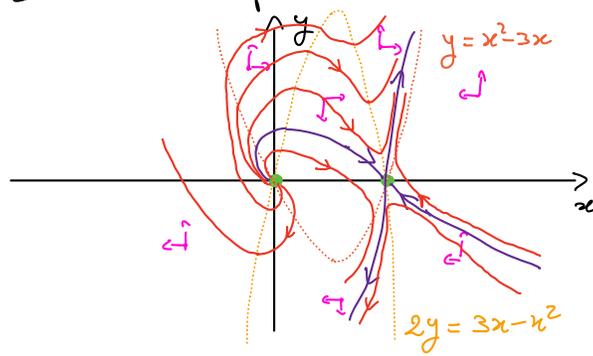
$I(x,y) = 2x - y$ e una curva di punti fissi $\{y = x^2 - 3x\}$.

Le rette $\{y = 2x + c\}$ sono quindi invarianti $\forall c \in \mathbb{R}$ e otteniamo il seguente ritratto di fase.

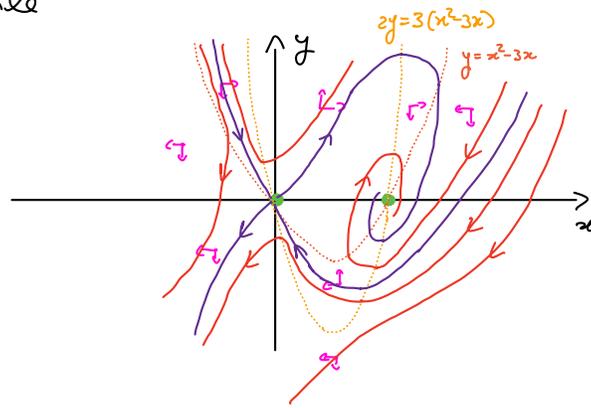


$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - x^2 + y \\ (3-x)x &> 0 \end{aligned}$$

Poniamo ora $\mu = -1$. Ci sono due punti fissi, P_1 che è un fuoco instabile e P_2 che è un punto di sella.



Per $\mu=3$, i punti fissi P_1 e P_2 sono rispettivamente punto di sella e fuoco stabile

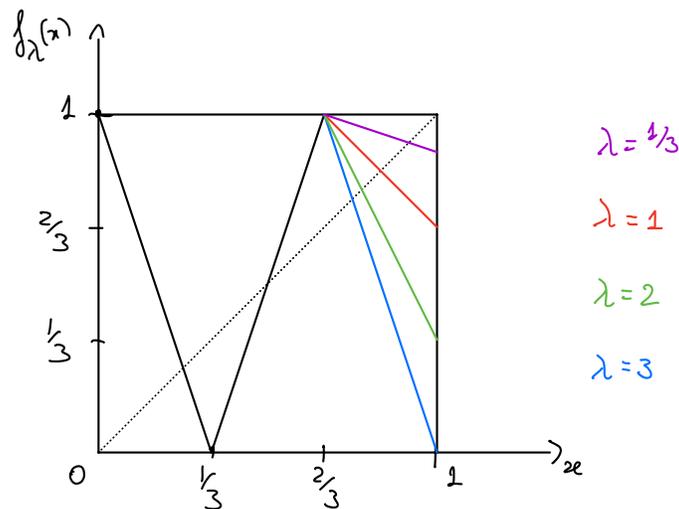


ESERCIZIO

3

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} -3x+1 & , x \in [0, \frac{1}{3}] = J_1 \\ 3x-1 & , x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = J_2 \\ 1+\lambda(\frac{2}{3}-x) & , x \in [\frac{2}{3}, 1] = J_3 \end{cases} \quad , \lambda \in (0,3]$$

Disegniamo il grafico di f_{λ} per alcuni valori di λ .



(a) Per ogni $\lambda \in (0,3]$ esistono tre punti fissi.

- $x_1 = \frac{1}{6}$. Si ha $f'_{\lambda}(\frac{1}{6}) = -3$, quindi x_1 è repulsivo $\forall \lambda \in (0,3]$

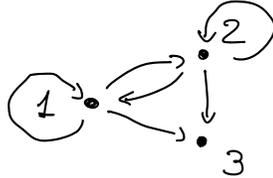
- $x_2 = \frac{1}{2}$. Si ha $f'_{\lambda}(\frac{1}{2}) = 3$, quindi x_2 è repulsivo $\forall \lambda \in (0,3]$

- $x_3 = \frac{3+2\lambda}{3(1+\lambda)}$. Si ha $f'_{\lambda}(x_3) = -\lambda$, quindi x_3 è attraente se $\lambda \in (0,1)$, x_3 è repulsivo se $\lambda \in (1,3]$, x_3 non è periodico se $\lambda=1$.

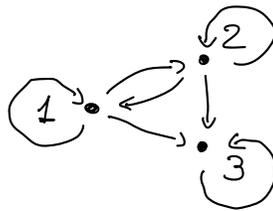
Nel caso $\lambda=1$ si osserva che $f_1(J_3) = J_3$ e $f_1^2(x) = x$ su J_3 . Quindi x_3 non è attrattivo né repulsivo se $\lambda=1$.

(b) Per ogni $\lambda \in (0, 3]$ si ha $f_2(J_1) = f_2(J_2) = [0, 1]$, quindi J_1 e J_2 ricoprono una volta tutti gli intervalli della partizione. Invece $f_2(J_3) = [1 - \frac{1}{3}\lambda, 1]$ e quindi:

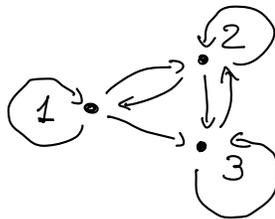
- se $\lambda \in (0, 1)$, J_3 non ricopre intervalli e l' f_2 -grafo è



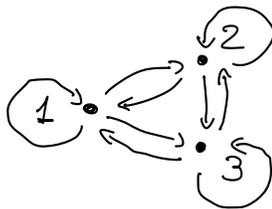
- se $\lambda \in [1, 2)$, J_3 ricopre una volta solo se stesso e si ha



- se $\lambda \in [2, 3)$, J_3 ricopre una volta se stesso e J_2 , quindi



- se $\lambda = 3$, J_3 ricopre una volta tutti gli intervalli e



(c) Per ogni $\lambda \in (0, 3]$, la mappa f_2 ha un ferro di cavallo nell'intervallo $J = [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$. Infatti scelti $K_1 = (\frac{1}{6}, \frac{5}{18})$ e $K_2 = (\frac{7}{18}, \frac{1}{2})$ si ha $f_2(\frac{1}{6}) = f_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f_2(\frac{5}{18}) = f_2(\frac{7}{18}) = \frac{1}{6}$, e quindi $f(K_1) = f(K_2) = J$ e chiaramente $K_1, K_2 \subset J$ con $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Per ogni $\lambda \in (0, 3]$, il sistema dinamico generato da f_λ è caotico. Per quantificare il comportamento caotico si può usare l'entropia topologica. Se $\lambda = 1/3$, possiamo osservare che il comportamento caotico di f_λ è generato dalla dinamica in $J \subset J_1 \cup J_2$, che è analoga alla mappa tenda. Possiamo codificare le orbite usando i due simboli $\{1, 2\}$, il che ci porta a concludere che $h_{\text{top}}(f_{1/3}) = \log 2$.

Se $\lambda = 3$ invece, anche la dinamica in J_3 diventa di natura caotica, e l'intero intervallo $[0, 1]$ esibisce un comportamento caotico. Possiamo codificare le orbite usando i tre simboli $\{1, 2, 3\}$ ed è ragionevole aspettarsi che in questo caso $h_{\text{top}}(f_3) = \log 3$.