Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 15-06-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \,,\, x \geq -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\} .$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{4x - y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0 \,,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \,,\, x + 4y \geq 2 \big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{6}\pi \,,\, \frac{7}{6}\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{1}{6}\pi \,,\, \frac{7}{6}\pi \right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \frac{1}{2}\cos t \,,\, 1 + 2\sin t \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \,,\, 2 \Big)$;

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} + 2xy \\ \frac{x}{x^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la somma del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) e del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$, con

$$\tilde{\gamma} : \left[2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \,,\, 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(t \,,\, 0 \Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} & se\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y) \neq (0,0)$, il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} = f(0,0) = 0\,.$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{(2+3\lambda^2)^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}} = 0 \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Proviamo quindi a dimostrare che il limite esiste ed è uguale a 0. Per farlo usiamo il criterio del confronto e la disuguaglianza $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ valida per ogni $a, b > 0$, e scriviamo

$$0 \leq \left| \frac{xy}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} - 0 \right| = \frac{|x|\,|y|}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{2}\frac{2x^2+3y^2}{(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\,(2x^2+3y^2)^{\frac{2}{3}}$$

La funzione $g(x,y) = \frac{1}{2}\,(2x^2+3y^2)^{\frac{2}{3}}$ è composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}^2$ e dunque verifica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$.

Ne segue che la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x^2+3y^2 \leq 6\,,\; x \geq -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili. La differenziabilità nell'origine va studiata a parte. Per gli scopi dell'esercizio possiamo anche non farlo ed annotare l'origine

$$D = (0,0) \in \Omega$$

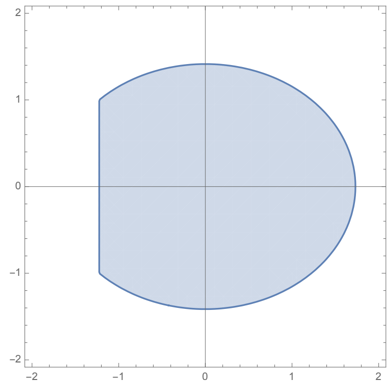

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

come primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione è differenziabile nell'origine, e D risulta essere un punto critico libero).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ossia le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{y(2x^2+9y^2)}{3(2x^2+3y^2)^{\frac{4}{3}}} = 0 \\ \frac{x(2x^2+y^2)}{(2x^2+3y^2)^{\frac{4}{3}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema non ha soluzioni, e dunque non ci sono punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ 2x^2 + 3y^2 = 6 \, , \, x \geq -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \, , \, -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1, che è una parte dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(\sqrt{3} \cos t \, , \, \sqrt{2} \sin t \right), \qquad t \in \left[-\frac{3}{4}\pi \, , \, \frac{3}{4}\pi \right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 6^{\frac{1}{6}} \, \sin t \, \cos t \, , \qquad t \in \left[-\frac{3}{4}\pi \, , \, \frac{3}{4}\pi \right].$$

Risulta $g_1'(t) = 6^{\frac{1}{6}}(\cos^2 t - \sin^2 t)$, dunque i punti critici interni all'intervallo $\left[-\frac{3}{4}\pi\,,\,\frac{3}{4}\pi\right]$ sono $t_1 = -\frac{\pi}{4}$ e $t_2 = \frac{\pi}{4}$, cui corrispondono i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\,t\right), \qquad t \in [-1,1]$$

che non è quella standard per un segmento, ma permette di semplificare i calcoli. Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{t}{(3t^2+3)^{\frac{1}{3}}}\,, \qquad t \in [-1,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(3t^2+3)^{\frac{1}{3}}-2t^2(3t^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{(3t^2+3)^{\frac{2}{3}}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{t^2+3}{(3t^2+3)^{\frac{4}{3}}}$, e dunque non ci sono punti critici.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = 0\,, \quad f(S_1) = f(Q_2) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}\,, \quad f(S_2) = f(Q_1) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}\,.$$

Dunque il massimo di f è $\sqrt{\frac{3}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}$ e il minimo è $-\sqrt{\frac{3}{2}}\,6^{-\frac{1}{3}}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{4x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\, x+4y \geq 2\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{4x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \Big(4\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, 1 \leq \rho^2 \leq 4\,,\, \rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta \geq 2\right\}$$

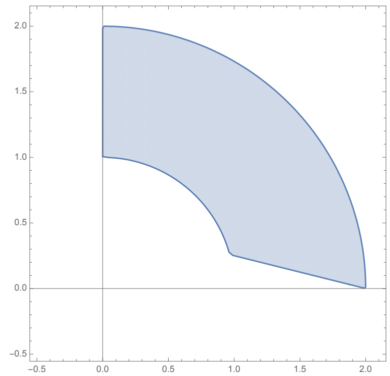

Figure 2: L'insieme Ω.

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \in [1,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Per semplificare lo studio della terza condizione, osserviamo che dalla definizione di Ω si ricava anche $y \geq 0$, dunque possiamo in effetti restringerci a

$$\rho \in [1,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Con questa restrizione abbiamo $\cos\theta + 4\sin\theta > 0$, e quindi la terza condizione per S si riscrive come

$$\rho \geq \frac{2}{\cos\theta + 4\sin\theta}\,.$$

Mettendo insieme le tre condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

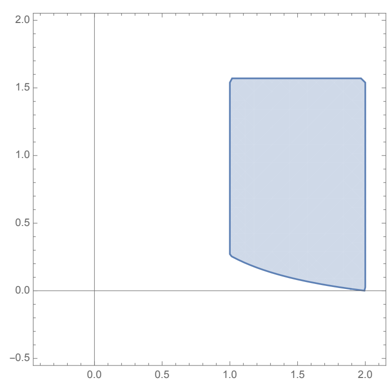

Figure 3: L'insieme S.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{2}{\cos\bar\theta + 4\sin\bar\theta} = 1\,,$$

e osservare che $\frac{2}{\cos\theta+4\sin\theta} = 2$ per $\theta = 0$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le \bar\theta\,,\ \frac{2}{\cos\theta + 4\sin\theta} \le \rho \le 2\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\ :\ \bar\theta \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\ 1 \le \rho \le 2\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{4x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \Big(4\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} \left(\int_{\frac{2}{\cos\theta+4\sin\theta}}^2 \Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\rho\right)d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} \Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_{\frac{2}{\cos\theta+4\sin\theta}}^2\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_1^2\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} 2\Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\theta - \int_0^{\bar\theta} 2\,\frac{4\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+4\sin\theta}\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \Big(4\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\theta =$$

$$= \Big(8\sin\theta+2\cos\theta\Big)\Big|_0^{\bar\theta} - \Big(2\log(\cos\theta+4\sin\theta)\Big)\Big|_0^{\bar\theta} + \Big(4\sin\theta+\cos\theta\Big)\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos\bar\theta + 4\sin\bar\theta - 2\log(\cos\bar\theta+4\sin\bar\theta) + 2 = 4 - 2\log 2\,.$$

avendo trovato dalla condizione su $\bar\theta$ che $\sin\bar\theta = \frac{8-\sqrt{13}}{17}$, e quindi $\cos\bar\theta = \frac{2+4\sqrt{13}}{17}$. In effetti, bastava osservare che $\cos\bar\theta + 4\sin\bar\theta = x_0 + 4y_0$ dove $P = (x_0, y_0)$ è il punto di intersezione tra $x^2+y^2 = 1$ e $x + 4y = 2$. Dunque $x_0 + 4y_0 = 2$.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{6}\pi\,,\ \frac{7}{6}\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{1}{6}\pi\,,\ \frac{7}{6}\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(2 + \frac{1}{2}\cos t\,,\ 1 + 2\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,,\ 2\Big)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-\frac{1}{6}\pi\,,\ \frac{7}{6}\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \Big(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,,\ 2\Big)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-\frac{1}{6}\pi\,,\ \frac{7}{6}\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2 + \frac{1}{2}\cos t_0 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 1 + 2\sin t_0 = 2 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{6}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin t_0 \\ 2\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\sqrt{3}\left(x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4}\,(y-2) = 0\,.$$

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} + 2xy \\ \frac{x}{x^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la somma del lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo* (γ, I) *e del lavoro di* $\mathbf{F}$ *lungo* $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$*, con*

$$\tilde{\gamma} : \left[2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\,,\, 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(t\,,\,0\Big)$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2xy - \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 2x = 2(y-1)x\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà delle due curve (γ, I) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$. Disegniamo in figura 4 il sostegno di (γ, I), che è una parte dell'ellisse $4(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ con punto iniziale e finale rispettivamente

$$P_{in} = \gamma\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_{fin} = \gamma\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ è invece il segmento $\overline{P_{fin}\,P_{in}}$, con punto iniziale P_{fin} e punto finale P_{in}, invertiti rispetto a quelli di (γ, I).

Dobbiamo calcolare la somma

$$L(\mathbf{F}, \gamma) + L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma})$$

dove $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ indica la curva chiusa che si ottiene percorrendo prima il sostegno di γ e poi quello di $\tilde{\gamma}$.

La curva $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ è chiusa, orientata positivamente, e l'insieme U racchiuso dalla curva è tutto contenuto nel dominio del campo, infatti $(0,0) \notin U$. Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F}, \gamma) + L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma}) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 2(y-1)x\,dxdy$$

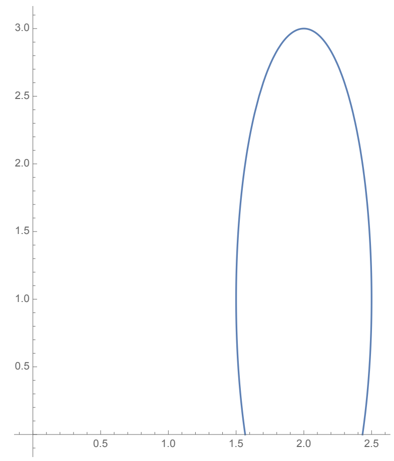

Figure 4: Il sostegno di (γ, I).

Per svolgere l'integrale scriviamo U come insieme semplice rispetto alla x, ossia

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 3\,,\, 2 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \leq x \leq 2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \right\}$$

e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) + L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \iint_U 2(y-1)x\,dxdy = \int_0^3 \left(\int_{2-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}^{2+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} 2(y-1)x\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left((y-1)\,x^2\right)\Big|_{x=2-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}^{x=2+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} dy = \int_0^3 4(y-1)\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}}\,dy =$$

$$= -\frac{16}{3}\left(1 - \frac{(y-1)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 15-06-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\,x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{3}\,x + y \geq -1\,,\, x^2+y^2 \leq 1 \Big\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\, x+y \geq 1 \big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi \right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 + 2\cos t\,,\, 1 + \frac{1}{2}\sin t \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2\,,\, 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \Big)$;

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} + y^2 \\ \frac{y}{x^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la differenza tra il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) e il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$, con

$$\tilde{\gamma} : \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\,,\, 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(0\,,\, t \Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}\,x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} & se\;\;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se\;\;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y)\neq(0,0)$, il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{3}\,x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}=f(0,0)=0\,.$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{3}\,x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{3}+\lambda)x}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}}=0\qquad\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Proviamo quindi a dimostrare che il limite esiste ed è uguale a 0. Per farlo usiamo il criterio del confronto e la disuguaglianza $a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$ valida per ogni $a,b>0$, e scriviamo

$$0\leq\left|\frac{\sqrt{3}\,x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}-0\right|=\frac{|\sqrt{3}\,x+y|}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\leq\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\leq\sqrt{2}\frac{\sqrt{3x^2+3y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{6}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$$

La funzione $g(x,y)=\sqrt{6}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$ è composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}^2$ e dunque verifica $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=g(0,0)=0$.

Ne segue che la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;\sqrt{3}\,x+y\geq-1\,,\;x^2+y^2\leq1\Big\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 5.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili. La differenziabilità nell'origine va studiata a parte. Per gli scopi dell'esercizio possiamo anche non farlo ed annotare l'origine

$$D=(0,0)\in\Omega$$

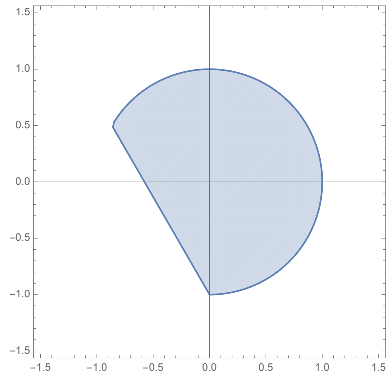

Figure 5: L'insieme $\bar{\Omega}$.

come primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ossia le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}\,x^2 - 2xy + 3\sqrt{3}\,y^2}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} = 0 \\ \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Moltiplicando per $\sqrt{3}$ la prima equazione e sottraendone la seconda, troviamo che deve essere verificato

$$8y^2 = 0\,,$$

e quindi non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + y^2 = 1\,,\ \sqrt{3}\,x + y \geq -1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sqrt{3}\,x + y = -1\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 0 \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (\cos t\,,\ \sin t)\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5}{6}\pi \right],$$

componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \sqrt{3}\,\cos t + \sin t\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5}{6}\pi \right].$$

Risulta $g_1'(t) = -\sqrt{3}\,\sin t + \cos t$, dunque c'è un punto critico interno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5}{6}\pi\right]$ dato da $t_1 = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\,-1-\sqrt{3}\,t\right), \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -\frac{1}{(4t^2+2\sqrt{3}\,t+1)^{\frac{1}{3}}}\,, \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2}{3}\frac{4t+\sqrt{3}}{(4t^2+2\sqrt{3}\,t+1)^{\frac{4}{3}}}$, dunque c'è un punto critico interno all'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right]$ dato da $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = -1\,, \quad f(Q_1) = 2\,, \quad f(Q_2) = -4^{\frac{1}{3}}\,.$$

Dunque il massimo di f è 2 e il minimo è $-4^{\frac{1}{3}}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\, x+y \geq 1\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 6.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \left(\cos\theta - \sin\theta\right)d\rho\,d\theta\,.$$

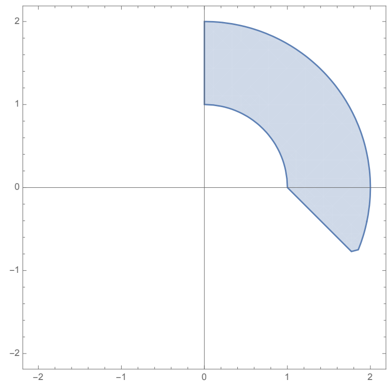

Figure 6: L'insieme Ω.

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, 1 \leq \rho^2 \leq 4\,,\, \rho\cos\theta + \rho\sin\theta \geq 1\right\}$$

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \in [1,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

La terza condizione implica $\cos\theta + \sin\theta > 0$, dunque $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,,\, \frac{\pi}{2}\right]$, e quindi la terza condizione per S si riscrive come

$$\rho \geq \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\,.$$

Mettendo insieme le tre condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 7 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

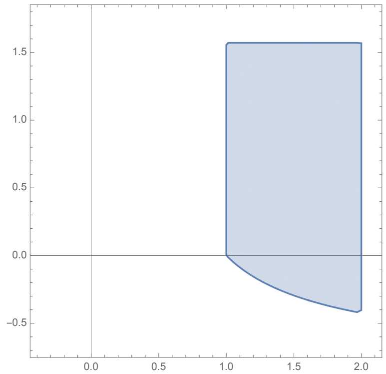

Figure 7: L'insieme S.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare $\bar\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,,\, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che

$$\frac{1}{\cos\bar\theta + \sin\bar\theta} = 2\,.$$

e osservare che $\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} = 1$ per $\theta = 0$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta) \,:\, \bar\theta \le \theta \le 0\,,\ \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \le \rho \le 2\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\ 1 \le \rho \le 2\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \Big(\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\bar\theta}^0 \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^2 \Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\rho\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\bar\theta}^0 \Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^2\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_1^2\,d\theta =$$

$$= \int_{\bar\theta}^0 2\Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\theta - \int_{\bar\theta}^0 \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos\theta-\sin\theta\Big)\,d\theta =$$

$$= \Big(2\sin\theta+2\cos\theta\Big)\Big|_{\bar\theta}^0 - \Big(\log(\cos\theta+\sin\theta)\Big)\Big|_{\bar\theta}^0 + \Big(\sin\theta+\cos\theta\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2 - 2\sin\bar\theta - 2\cos\bar\theta + \log(\cos\bar\theta+\sin\bar\theta) = 1 - \log 2\,.$$

avendo trovato dalla condizione su $\bar\theta$ che $\sin\bar\theta = \frac{1-\sqrt7}{4}$, e quindi $\cos\bar\theta = \frac{1+\sqrt7}{4}$. In effetti, bastava osservare che $\cos\bar\theta + \sin\bar\theta = \frac12(x_0+y_0)$ dove $P = (x_0, y_0)$ è il punto di intersezione tra $x^2+y^2 = 4$ e $x+y = 1$. Dunque $\cos\bar\theta + \sin\bar\theta = \frac12$.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac23\pi\,,\ \frac23\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac23\pi\,,\ \frac23\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 + 2\cos t\,,\ 1 + \frac12\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2\,,\ 1+\frac{\sqrt3}{4}\Big)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-\frac23\pi\,,\ \frac23\pi)$ per cui $\gamma'(t) \ne 0$. In particolare per $P = \Big(2\,,\ 1+\frac{\sqrt3}{4}\Big)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-\frac23\pi\,,\ \frac23\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + 2\cos t_0 = 2 \\ 1 + \frac12\sin t_0 = 1 + \frac{\sqrt3}{4} \end{cases}$$

L'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{3}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ \frac12\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt3 \\ \frac14 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{1}{4}\,(x-2) + \sqrt{3}\,\left(y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0\,.$$

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} + y^2 \\ \frac{y}{x^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la differenza tra il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo* (γ, I) *e il lavoro di* $\mathbf{F}$ *lungo* $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$*, con*

$$\tilde{\gamma} : \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\,,\, 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(0\,,\, t\Big)$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + 2xy - \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - 2y = 2(x-1)y\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà delle due curve (γ, I) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$. Disegniamo in figura 8 il sostegno di (γ, I), che è una parte dell'ellisse $\frac{(x-1)^2}{4} + 4(y-1)^2 = 1$ con punto iniziale e finale rispettivamente

$$P_{_{in}} = \gamma\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_{_{fin}} = \gamma\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ è invece il segmento $\overline{P_{_{in}}\,P_{_{fin}}}$, con punto iniziale $P_{_{in}}$ e punto finale $P_{_{fin}}$, coincidenti con quelli di (γ, I).

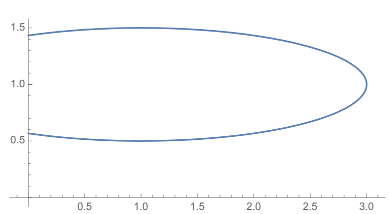

Figure 8: Il sostegno di (γ, I).

Dobbiamo calcolare la differenza

$$L(\mathbf{F},\gamma) - L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F},\gamma) + L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}^{-1}) = L(\mathbf{F},\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1})$$

dove $\tilde{\gamma}^{-1}$ indica la curva $\tilde{\gamma}$ percorsa con orientazione opposta, e $\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}$ indica la curva chiusa che si ottiene percorrendo prima il sostegno di γ e poi quello di $\tilde{\gamma}^{-1}$.

La curva $\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}$ è chiusa, orientata positivamente e l'insieme U racchiuso dalla curva è tutto contenuto nel dominio del campo, infatti $(0,0) \notin U$. Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) - L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F},\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 2(x-1)y\,dxdy$$

Per svolgere l'integrale scriviamo U come insieme semplice rispetto alla y, ossia

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 3\,,\; 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} \le y \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}\right\}$$

e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) - L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \iint_U 2(x-1)y\,dxdy = \int_0^3 \left(\int_{1-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}^{1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} 2(x-1)y\,dy\right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left((x-1)\,y^2\right)\Big|_{y=1-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}^{y=1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} dx = \int_0^3 2(x-1)\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}\,dx =$$

$$= -\frac{8}{3}\left(1 - \frac{(x-1)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \sqrt{3}\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito C del 15-06-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + \sqrt{3}\,y \leq 1 \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \Big\} \, .$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{x+y}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0 \, , \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \, , \, 0 \leq x - y \leq 3 \big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{2}{3}\pi \, , \, \frac{2}{3}\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{2}{3}\pi \, , \, \frac{2}{3}\pi \right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(1 + 2\cos t \, , \, \sin t \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2 \, , \, \frac{\sqrt{3}}{2} \Big)$;

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} + y^2 \\ \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la differenza tra il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) e il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$, con

$$\tilde{\gamma} : \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(0 \, , \, t \Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} & se \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & se \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y) \neq (0,0)$, il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2 - \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = f(0,0) = 2\,,$$

che è equivalente a chiedersi se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = 0\,,$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{3}\,\lambda)x}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}}\,x^{\frac{1}{2}}} = 0 \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Proviamo quindi a dimostrare che il limite esiste ed è uguale a 0. Per farlo usiamo il criterio del confronto e la disuguaglianza $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ valida per ogni $a,b>0$, e scriviamo

$$0 \leq \left| \frac{x+\sqrt{3}\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} - 0 \right| = \frac{|x+\sqrt{3}\,y|}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{x^2+3y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \sqrt{2}\frac{\sqrt{3x^2+3y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{6}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$$

La funzione $g(x,y) = \sqrt{6}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$ è composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}^2$ e dunque verifica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$.

Ne segue che la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+\sqrt{3}\,y \leq 1\,,\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 9.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

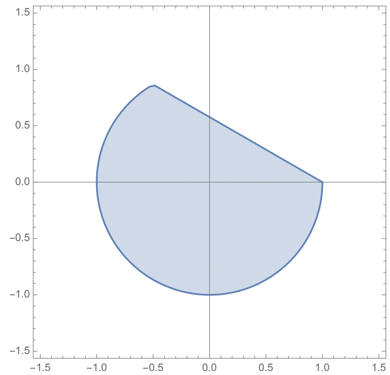

Figure 9: L'insieme $\bar{\Omega}$.

La funzione f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili. La differenziabilità nell'origine va studiata a parte. Per gli scopi dell'esercizio possiamo anche non farlo ed annotare l'origine

$$D = (0,0) \in \Omega$$

come primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ossia le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2-\sqrt{3}\,xy+2y^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} = 0 \\ \frac{2\sqrt{3}\,x^2-xy+\sqrt{3}\,y^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Moltiplicando per $\sqrt{3}$ la seconda equazione e sottraendone la prima, troviamo che deve essere verificato

$$5x^2 + y^2 = 0\,,$$

e quindi non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + y^2 = 1\,,\, x + \sqrt{3}\,y \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x + \sqrt{3}\,y = 1\,,\, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (\cos t\,,\, \sin t)\,, \qquad t \in \left[-\frac{4}{3}\pi\,,\, 0 \right]\,,$$

componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2 - \cos t - \sqrt{3}\,\sin t\,, \qquad t \in \left[-\frac{4}{3}\pi\,,\,0\right].$$

Risulta $g_1'(t) = \sin t - \sqrt{3}\,\cos t$, dunque c'è un punto critico interno all'intervallo $\left[-\frac{4}{3}\pi\,,\,0\right]$ dato da $t_1 = \arctan\sqrt{3} = -\frac{2}{3}\pi$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(1 - \sqrt{3}\,t\,,\,t\right), \qquad t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 2 - \frac{1}{(4t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 1)^{\frac{1}{4}}}\,, \qquad t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Abbiamo $g_2'(t) = -\frac{1}{2}\frac{4t-\sqrt{3}}{(4t^2-2\sqrt{3}\,t+1)^{\frac{5}{4}}}$, dunque c'è un punto critico interno all'intervallo $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ dato da $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = 2\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = 1\,, \quad f(Q_1) = 4\,, \quad f(Q_2) = 2 - \sqrt{2}\,.$$

Dunque il massimo di f è 4 e il minimo è $2 - \sqrt{2}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,:\, x \geq 0\,,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,,\, 0 \leq x - y \leq 3\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 10.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

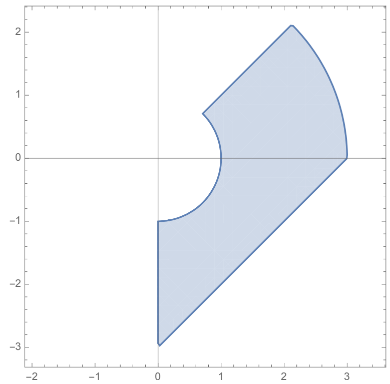

Figure 10: L'insieme Ω.

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_S \Big(\cos\theta + \sin\theta\Big)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \Big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, 1 \leq \rho^2 \leq 9\,,\, 0 \leq \rho\cos\theta - \rho\sin\theta \leq 3\Big\}$$

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \in [1,3] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

La terza condizione implica $\cos\theta - \sin\theta \geq 0$, dunque $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$, e inoltre dalla terza condizione ricaviamo anche

$$\rho \leq \frac{3}{\cos\theta - \sin\theta}\,.$$

Mettendo insieme le tre condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 11 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

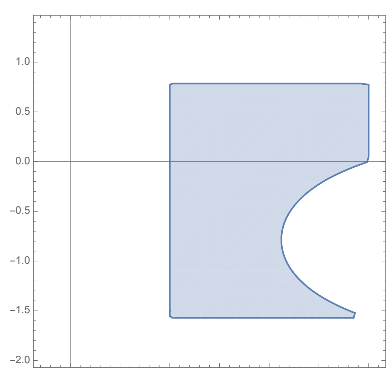

Figure 11: L'insieme S.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare le due soluzioni in $\bar{\theta} \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ di

$$\frac{3}{\cos\theta - \sin\theta} = 3\,,$$

che sono $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = 0$. Dunque possiamo scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0\,,\ 1 \le \rho \le \frac{3}{\cos\theta - \sin\theta}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\,,\ 1 \le \rho \le 3\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \Big(\cos\theta + \sin\theta\Big)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_1^{\frac{3}{\cos\theta-\sin\theta}} \Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,d\rho\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^3 \Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_1^{\frac{3}{\cos\theta-\sin\theta}}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,\rho\Big|_1^3\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\,\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\Big(\cos\theta+\sin\theta\Big)\,d\theta =$$

$$= -\Big(3\,\log(\cos\theta-\sin\theta)\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \Big(\sin\theta-\cos\theta\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \Big(2\sin\theta - 2\cos\theta\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\,.$$

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 + 2\cos t\,,\,\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(2\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \Big(2\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{2}{3}\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + 2\cos t_0 = 2 \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

L'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{3}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{1}{2}\,(x-2) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0\,.$$

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} + y^2 \\ \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la differenza tra il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo* (γ, I) *e il lavoro di* $\mathbf{F}$ *lungo* $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$*, con*

$$\tilde{\gamma} : \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(0\,,\,t\Big)$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{-x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^{\frac{3}{2}}} + 2xy - \frac{-x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^{\frac{3}{2}}} - 2y = 2(x-1)y\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà delle due curve (γ, I) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$. Disegniamo in figura 12 il sostegno di (γ, I), che è una parte dell'ellisse $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$ con punto iniziale e finale rispettivamente

$$P_{in} = \gamma\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_{fin} = \gamma\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ è invece il segmento $\overline{P_{in}\,P_{fin}}$, con punto iniziale P_{in} e punto finale P_{fin}, coincidenti con quelli di (γ, I).

Dobbiamo calcolare la differenza

$$L(\mathbf{F}, \gamma) - L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma) + L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}^{-1}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1})$$

dove $\tilde{\gamma}^{-1}$ indica la curva $\tilde{\gamma}$ percorsa con orientazione opposta, e $\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}$ indica la curva chiusa che si ottiene percorrendo prima il sostegno di γ e poi quello di $\tilde{\gamma}^{-1}$.

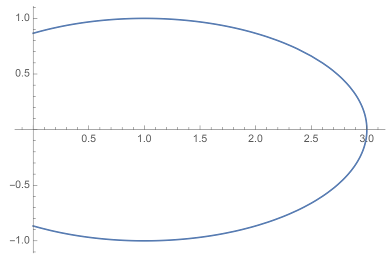

Figure 12: Il sostegno di (γ, I).

La curva $\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}$ è chiusa, orientata positivamente e l'insieme U racchiuso dalla curva è tutto contenuto nel dominio del campo, infatti $(0,1) \notin U$. Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F}, \gamma) - L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\, dxdy = \iint_U 2(x-1)y\, dxdy$$

Per svolgere l'integrale scriviamo U come insieme semplice rispetto alla y, ossia

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 3\,,\, -\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} \right\}$$

e quindi

$$L(\mathbf{F}, \gamma) - L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = \iint_U 2(x-1)y\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} 2(x-1)y\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \big((x-1)\, y^2 \big) \Big|_{y=-\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}^{y=\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}} dx = 0\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito D del 15-06-2016

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 3y^2 \leq 3 \,,\, y \leq \frac{1}{2} \right\} .$$

(Suggerimento: potrebbe essere utile ricordare che $2^4 = 16$*,* $2^8 = 256$*,* $3^3 = 27$ *e* $3^5 = 243$*.*

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{3x - y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0 \,,\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \,,\, x + 3y \geq 3 \big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{6}\pi \,,\, \frac{7}{6}\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{1}{6}\pi \,,\, \frac{7}{6}\pi \right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \gamma(t) = \Big(\cos t \,,\, 1 + 2 \sin t \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, 2 \Big)$;

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x-2)^2+y^2} + 2xy \\ \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la somma del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) e del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$, con

$$\tilde{\gamma} : \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(t \,,\, 0 \Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases} 1+\frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}} & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) dire in quali punti del suo dominio la funzione è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y)\neq(0,0)$, il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+\frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}=f(0,0)=1\,,$$

che è equivalente a chiedersi se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}=0\,.$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to0}\frac{\lambda x^2}{(1+3\lambda^2)^{\frac{3}{4}}\,x^{\frac{3}{2}}}=0 \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Proviamo quindi a dimostrare che il limite esiste ed è uguale a 0. Per farlo usiamo il criterio del confronto e la disuguaglianza $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ valida per ogni $a,b>0$, e scriviamo

$$0\leq\left|\frac{xy}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}-0\right|=\frac{|x|\,|y|}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+3y^2}{(x^2+3y^2)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\,(x^2+3y^2)^{\frac{1}{4}}$$

La funzione $g(x,y)=\frac{1}{2}\,(x^2+3y^2)^{\frac{1}{4}}$ è composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}^2$ e dunque verifica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=g(0,0)=0$.

Ne segue che la funzione $f(x,y)$ è continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+3y^2\leq3\,,\,y\leq\frac{1}{2}\right\}\,.$$

(Suggerimento: potrebbe essere utile ricordare che $2^4=16$, $2^8=256$, $3^3=27$ e $3^5=243$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 13.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

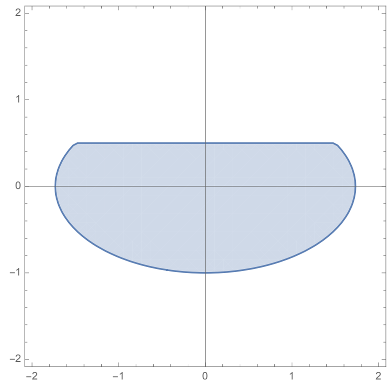

Figure 13: L'insieme $\bar{\Omega}$.

La funzione f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dove si scrive come composizione di funzioni differenziabili. La differenziabilità nell'origine va studiata a parte. Per gli scopi dell'esercizio possiamo anche non farlo ed annotare l'origine

$$D = (0,0) \in \Omega$$

come primo punto da considerare (si verifica che in effetti la funzione non è differenziabile nell'origine).

Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ossia le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{y(6y^2-x^2)}{2(x^2+3y^2)^{\frac{7}{4}}} = 0 \\ \frac{x(2x^2-3y^2)}{2(x^2+3y^2)^{\frac{7}{4}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

È immediato verificare che non è ammissibile che una delle due variabili si annulli, altrimenti si annullerebbe anche l'altra, e quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 6y^2 - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3y^2 = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

da cui, si ricava facilmente che non ci sono soluzioni, e dunque non ci sono punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + 3y^2 = 3 \, , \, y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y = \frac{1}{2}\,,\ -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \right\}.$$

Per quanto riguarda Γ_1, che è una parte dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(\sqrt{3}\cos t\,,\ \sin t\right), \qquad t \in \left[-\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{\pi}{6}\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1 + 3^{-\frac{1}{4}}\,\sin t\,\cos t\,, \qquad t \in \left[-\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{\pi}{6}\right].$$

Risulta $g_1'(t) = 3^{-\frac{1}{4}}\,(\cos^2 t - \sin^2 t)$, dunque i punti critici interni all'intervallo $\left[-\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{\pi}{6}\right]$ sono $t_1 = -\frac{3}{4}\pi$ e $t_2 = -\frac{\pi}{4}$, cui corrispondono i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\ \frac{1}{2}\right), \qquad t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

che non è quella standard per un segmento, ma permette di semplificare i calcoli. Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 + \sqrt{2}\,\frac{t}{(4t^2+3)^{\frac{3}{4}}}\,, \qquad t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \sqrt{2}\,\frac{(4t^2+3)^{\frac{3}{4}} - 6t^2(4t^2+3)^{-\frac{1}{4}}}{(4t^2+3)^{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{2}\,\frac{2t^2-3}{(4t^2+3)^{\frac{7}{4}}}$, e dunque i punti critici interni all'intervallo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ sono $t_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $t_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, cui corrispondono i punti critici vincolati

$$Q_3 = \gamma_2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_4 = \gamma_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(D) = 1\,, \quad f(S_1) = 1 - \frac{3^{\frac{1}{4}}}{4}\,, \quad f(S_2) = 1 + \frac{3^{\frac{1}{4}}}{4}\,, \quad f(Q_1) = 1 + \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2}\,, \quad f(Q_2) = 1 - \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2}$$

$$f(Q_3) = \frac{2}{3}\,, \quad f(Q_4) = \frac{4}{3}\,.$$

Usando il suggerimento dato, otteniamo che

$$\frac{3^{\frac{1}{4}}}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2} \ \Leftrightarrow\ 3^{\frac{5}{4}} < 4 < 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \ \Leftrightarrow\ 3^5 < 2^8 < 2^4 \cdot 3^3\,.$$

Dunque il massimo di f è $1 + \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2}$ e il minimo è $1 - \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{2}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{3x - y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,,\, x + 3y \geq 3\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 14.

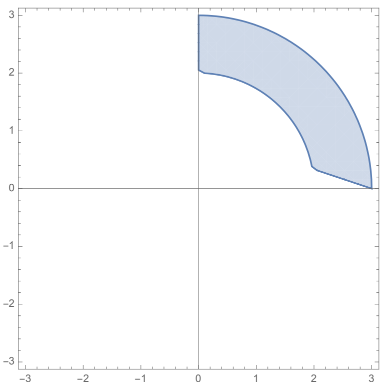

Figure 14: L'insieme Ω.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{3x - y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \iint_S \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \big\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, 4 \leq \rho^2 \leq 9\,,\, \rho\cos\theta + 3\rho\sin\theta \geq 3\big\}$$

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \in [2, 3] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Per semplificare lo studio della terza condizione, osserviamo che dalla definizione di Ω si ricava anche $y \geq 0$, dunque possiamo in effetti restringerci a

$$\rho \in [2, 3] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Con questa restrizione abbiamo $\cos\theta + 3\sin\theta > 0$, e quindi la terza condizione per S si riscrive come

$$\rho \geq \frac{3}{\cos\theta + 3\sin\theta}\,.$$

Mettendo insieme le tre condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 15 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

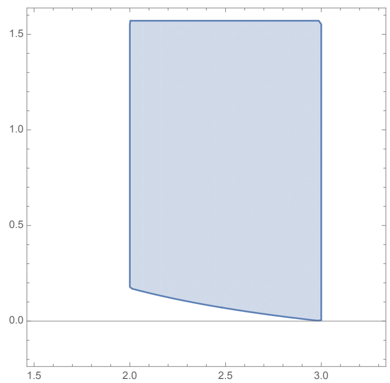

Figure 15: L'insieme S.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{3}{\cos\bar\theta + 3\sin\bar\theta} = 2\,,$$

e osservare che $\frac{3}{\cos\theta+3\sin\theta} = 3$ per $\theta = 0$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 \leq \theta \leq \bar\theta\,,\ \frac{3}{\cos\theta + 3\sin\theta} \leq \rho \leq 3\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\ :\ \bar\theta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 2 \leq \rho \leq 3\right\}\,.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{3x - y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \iint_S \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} \left(\int_{\frac{3}{\cos\theta+3\sin\theta}}^3 \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\right)\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_2^3 \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\rho\right)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,\rho\Big|_{\frac{3}{\cos\theta+3\sin\theta}}^3\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,\rho\Big|_2^3\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar\theta} 3\Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\theta - \int_0^{\bar\theta} 3\,\frac{3\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + 3\sin\theta}\,d\theta + \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \Big(3\cos\theta - \sin\theta\Big)\,d\theta =$$

$$= \Big(9\sin\theta + 3\cos\theta\Big)\Big|_0^{\bar\theta} - \Big(3\log(\cos\theta + 3\sin\theta)\Big)\Big|_0^{\bar\theta} + \Big(3\sin\theta + \cos\theta\Big)\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\cos\bar\theta + 6\sin\bar\theta - 3\log(\cos\bar\theta + 3\sin\bar\theta) = 3 - 3\log\frac{3}{2}\,.$$

avendo trovato dalla condizione su $\bar\theta$ che $\sin\bar\theta = \frac{9-\sqrt{31}}{20}$, e quindi $\cos\bar\theta = \frac{3+3\sqrt{31}}{20}$. In effetti, bastava osservare che $\cos\bar\theta + 3\sin\bar\theta = \frac{1}{2}(x_0+3y_0)$ dove $P=(x_0,y_0)$ è il punto di intersezione tra $x^2+y^2=4$ e $x+3y=3$. Dunque $\cos\bar\theta+3\sin\bar\theta = \frac{3}{2}$.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{1}{6}\pi\,,\,\frac{7}{6}\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{1}{6}\pi\,,\,\frac{7}{6}\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\cos t\,,\,1+2\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,2\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-\frac{1}{6}\pi\,,\,\frac{7}{6}\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,2\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-\frac{1}{6}\pi\,,\,\frac{7}{6}\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1+2\sin t_0 = 2 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{6}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ 2\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\sqrt{3}\,\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\,(y-2) = 0\,.$$

ii) dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x-2)^2+y^2} + 2xy \\ \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2} + x^2 y \end{pmatrix}$$

calcolare la somma del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) e del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\tilde\gamma, \tilde I)$, con

$$\tilde\gamma : \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde\gamma(t) = \Big(t\,,\,0\Big)$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ e

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{(x-2)^2 + y^2 - 2(x-2)^2}{((x-2)^2+y^2)^2} + 2xy - \frac{-(x-2)^2 - y^2 + 2y^2}{((x-2)^2+y^2)^2} - 2x = 2(y-1)x\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

Studiamo le proprietà delle due curve (γ, I) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$. Disegniamo in figura 16 il sostegno di (γ, I), che è una parte dell'ellisse $x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ con punto iniziale e finale rispettivamente

$$P_{in} = \gamma\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_{fin} = \gamma\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sostegno della curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ è invece il segmento $\overline{P_{fin}\, P_{in}}$, con punto iniziale P_{fin} e punto finale P_{in}, invertiti rispetto a quelli di (γ, I).

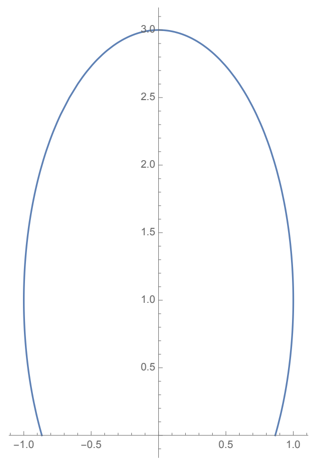

Figure 16: Il sostegno di (γ, I).

Dobbiamo calcolare la somma

$$L(\mathbf{F}, \gamma) + L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma})$$

dove $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ indica la curva chiusa che si ottiene percorrendo prima il sostegno di γ e poi quello di $\gamma \cup \tilde{\gamma}$.

La curva $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ è chiusa, orientata positivamente, e l'insieme U racchiuso dalla curva è tutto contenuto nel dominio del campo, infatti $(2,0) \notin U$. Possiamo quindi applicare il Teorema del Rotore e otteniamo

$$L(\mathbf{F}, \gamma) + L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma}) = L(\mathbf{F}, \gamma \cup \tilde{\gamma}) = \iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\, dxdy = \iint_U 2(y-1)x\, dxdy$$

Per svolgere l'integrale scriviamo U come insieme semplice rispetto alla x, ossia

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 3\,,\ -\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \le x \le \sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \right\}$$

e quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma)+L(\mathbf{F},\tilde{\gamma})=\iint_U 2(y-1)x\,dxdy=\int_0^3\left(\int_{-\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}2(y-1)x\,dx\right)dy=$$

$$=\int_0^3\left((y-1)\,x^2\right)\Big|_{x=-\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}^{x=\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}}dy=0\,.$$