Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 13-01-2022

Esercizio 1. (8 punti) Studiare la stabilità dei punti fissi del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\, x + 4y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Esercizio 2. (12 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \mu y^2 + 1 \\ \dot{y} = (1-x)^2 - \mu^2 y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. Considerare in maniera dettagliata i casi $\mu = 0$ e $\mu = 1$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$T : [0,1] \to [0,1]\,, \quad T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{per } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{per } \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}, \\ 2 - 2x, & \text{per } \frac{3}{4} \le x \le 1, \end{cases}$$

(i) studiare l'esistenza di punti periodici e determinare il loro periodo minimo;

(ii) discutere l'ω-limite dei punti $x \in [0,1]$;

(iii) discutere se è possibile parlare di comportamento caotico per T.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 4y^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Punti fissi sono soluzioni di $\begin{cases} \mu x + 4y^3 = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} \mu x - 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x(\mu - 4x^2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Quindi

$$\text{Punti fissi} = \begin{cases} \{(0,0)\}, & \text{se } \mu \leq 0 \\ \left\{(0,0), \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2}, -\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{\mu}}{2}, \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)\right\}, & \text{se } \mu > 0 \end{cases}$$

Per studiare la stabilità ricaviamo innanzitutto

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \mu & 12y^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{P_1 = (0,0)}$ $\qquad JF(P_1) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det JF(P_1) = -\mu$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{tr} JF(P_1) = \mu - 1$

- $\mu < 0$, gli autovalori sono $\{\mu, -1\} \subset \mathbb{R}^-$
  P_1 è punto fisso iperbolico di tipo nodo stabile. Dunque è asintoticamente stabile.

- $\mu > 0$, gli autovalori sono $\{\mu, -1\}$, uno positivo e uno negativo.
  P_1 è punto fisso iperbolico di tipo sella. Dunque è instabile.

- $\mu = 0$, in questo caso P_1 non è iperbolico. Per studiarne la stabilità cerchiamo una funzione di Lyapunov del tipo

$V(x,y) = a x^{2n} + b y^{2m}$, con $a, b > 0$ e $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\dot V(x,y) = 2n a x^{2n-1}(4y^3) + 2mb y^{2m-1}(-x-y) =$$
$$= 8na x^{2n-1} y^3 - 2mb x y^{2m-1} - 2mb y^{2m}$$

Vediamo di far cancellare i termini misti, ossia poniamo

$$8na x^{2n-1} y^3 = 2mb x y^{2m-1}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} 2n-1 = 1 \\ 3 = 2m-1 \\ 4na = mb \end{cases} \iff \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \\ 4a = 2b \end{cases}$$

La funzione $V(x,y) = x^2 + 2y^4$ soddisfa quindi

- $V(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$
- $\dot V(x,y) = -8y^4 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

e dunque è una funzione di Lyapunov per P_1. Ne segue che P_1 è stabile.

Con più attenzione, poiché $\{\dot V = 0\} = \{y = 0\}$ e il campo $F(x,y)$ soddisfa $F|_{y=0} = (0, -x)$, possiamo dedurre che l'unico insieme invariante in $\{y=0\}$ è il punto P_1. Quindi applicando il principio di La Salle otteniamo che P_1 è asintoticamente stabile.

$\boxed{P_2 = \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2}, -\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right), \mu > 0}$ $\quad JF(P_2) = \begin{pmatrix} \mu & 3\mu \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det JF(P_2) = 2\mu > 0$

$\operatorname{tr} JF(P_2) = \mu - 1$

Questo è sufficiente per concludere che il punto è sempre iperbolico per $\mu \neq 1$, e se $\mu \in (0,1)$ è asintoticamente stabile, se $\mu > 1$ è instabile.

<u>OSS</u> Più nei dettagli possiamo studiare gli autovalori.

Gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 - (\mu-1)\lambda + 2\mu = 0$, quindi

$$\lambda_\pm = \frac{\mu-1 \pm \sqrt{(\mu-1)^2 - 8\mu}}{2} = \frac{\mu-1 \pm \sqrt{\mu^2 - 10\mu + 1}}{2}$$

Per $\mu > 0$ si ha $\mu^2 - 10\mu + 1 \geq 0 \iff \mu \in (0, 5-2\sqrt{6}] \cup [5+2\sqrt{6}, +\infty)$
e $0 < 5-2\sqrt{6} < 1 < 5+2\sqrt{6}$. Quindi

- $\mu \in (0, 5-2\sqrt{6})$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) < 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori reali distinti e negativi. Quindi P_2 è nodo stabile, e dunque è asintoticamente stabile.

- $\mu = 5-2\sqrt{6}$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) < 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori reali uguali e negativi. Quindi P_2 è nodo improprio o stella stabile, e dunque è asintoticamente stabile.

- $\mu \in (5-2\sqrt{6}, 1)$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) < 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori complessi coniugati con $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Quindi P_2 è fuoco stabile, e dunque è asintoticamente stabile.

- $\mu \in (1, 5+2\sqrt{6})$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) > 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori complessi coniugati con $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Quindi P_2 è fuoco instabile.

- $\mu = 5+2\sqrt{6}$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) > 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori reali uguali e positivi. Quindi P_2 è nodo improprio o stella instabile.

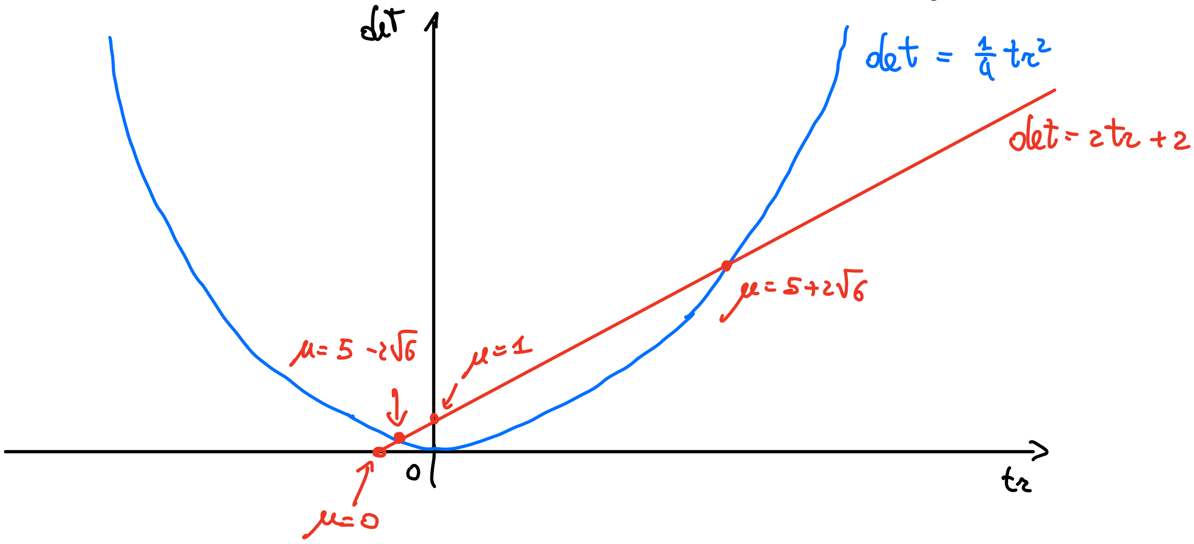
- $\mu \in (5+2\sqrt{6}, +\infty)$, $\det JF(P_2) > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) > 0$

  P_2 è punto fisso iperbolico e $JF(P_2)$ ha autovalori reali distinti e positivi. Quindi P_2 è nodo instabile.

<u>OSS</u> Lo studio che abbiamo fatto per P_2 si può riassumere considerando la relazione tra $\det JF(P_2)$ e $\operatorname{tr} JF(P_2)$ per $\mu > 0$. Si ha

$$\det JF(P_2) = 2 \operatorname{tr} JF(P_2) + 2$$

che nel piano $(\operatorname{tr}, \det)$ ci restituisce la seguente situazione.



$$\boxed{P_3 = \left(-\frac{\sqrt{\mu}}{2}, \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right), \ \mu > 0}$$

$$JF(P_3) = \begin{pmatrix} \mu & 3\mu \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = JF(P_2)$$

dunque valgono le considerazioni fatte per P_2.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \mu y^2 + 1 & =: f(x,y) \\ \dot{y} = (1-x)^2 - \mu^2 y & =: g(x,y) \end{cases}$$

Iniziamo cercando i punti fissi, che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x - \mu y^2 + 1 = 0 \\ (1-x)^2 - \mu^2 y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu y^2 = 1 - x \\ \mu^2 y = (1-x)^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \mu y^2 = 1-x \\ \mu^2 y = \mu^2 y^4 \end{cases} \underset{\mu \neq 0}{\iff} \begin{cases} \mu y^2 = 1-x \\ y(1-y^3) = 0 \end{cases}$$

Poniamo quindi $\boxed{\mu \neq 0}$. Punti fissi $= \{ (1,0) , (1-\mu, 1) \}$

Studiamo la stabilità dei punti fissi usando

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -2\mu y \\ -2(1-x) & -\mu^2 \end{pmatrix}$$

<u>$P_1 = (1,0)$</u> $\qquad JF(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu^2 \end{pmatrix}$ $\qquad \det JF(P_1) = \mu^2 > 0$, $\quad tr\, JF(P_1) = -1-\mu^2 < 0$

Gli autovalori sono $\{-1, -\mu^2\} \subset \mathbb{R}^-$, quindi se $\mu^2 \neq 1$ P_1 è nodo stabile, se $\mu^2 = 1$ gli autovalori coincidono ma la matrice è diagonale, quindi P_1 è stella stabile.

<u>$P_2 = (1-\mu, 1)$</u> $\qquad JF(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2\mu \\ -2\mu & -\mu^2 \end{pmatrix}$ $\qquad \det JF(P_2) = -3\mu^2 < 0$, $\quad tr\, JF(P_2) = -1-\mu^2 < 0$

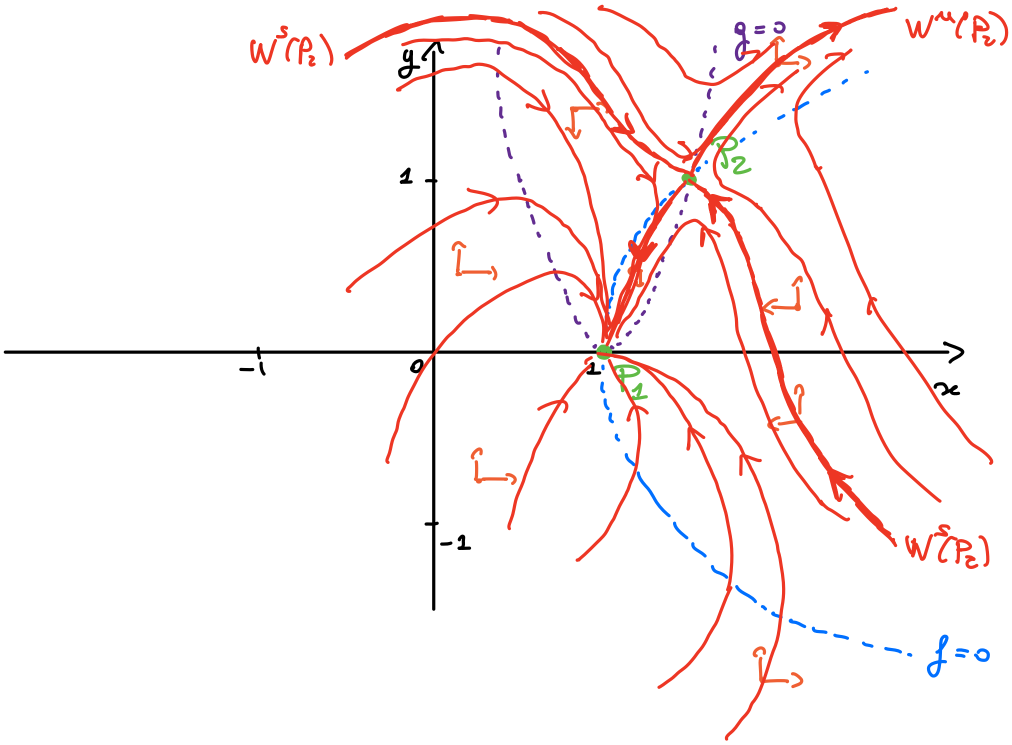
Gli autovalori sono reali e discordi, quindi P_2 è un punto di sella.

<u>Studio delle orbite periodiche</u>

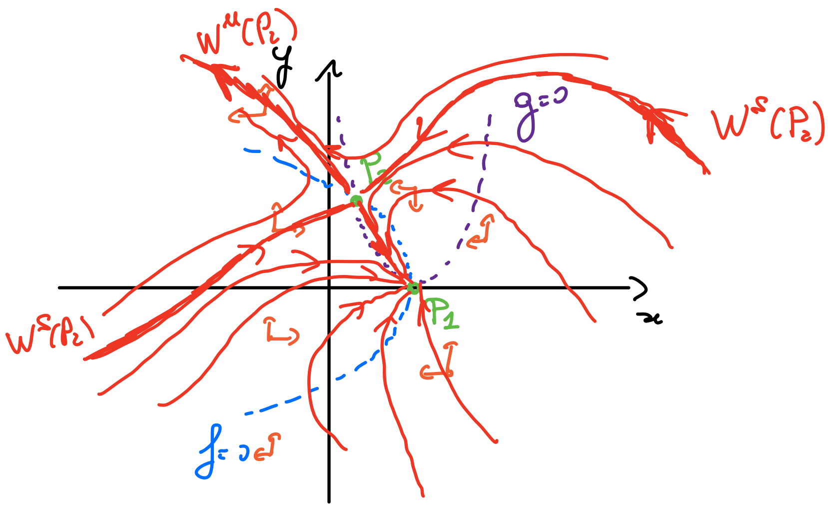
Poiché $\quad div\, F = -1-\mu^2 < 0 \quad \forall \mu \quad$ non possono esistere orbite periodiche per il criterio di Bendixson-Dulac.

<u>Consideriamo ora diversi casi per μ.</u> Possiamo aggiungere allo studio il segno del campo e disegnare un possibile ritratto di fase

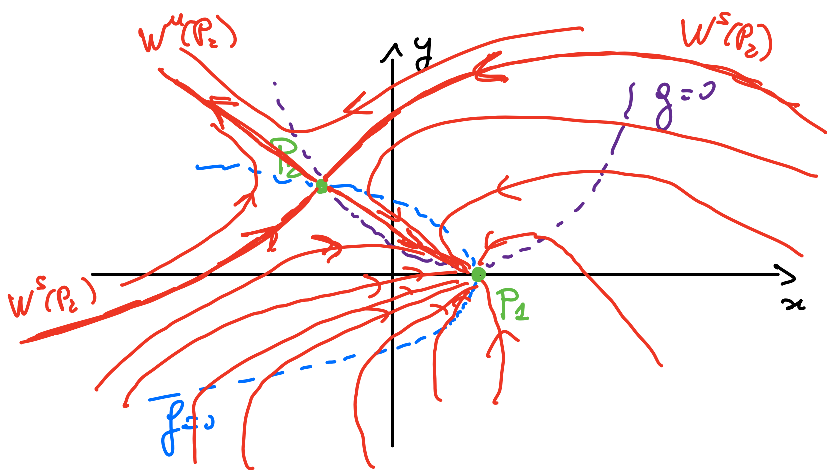
$\boxed{\mu < 0}$



$\boxed{\mu \in (0,1)}$



$\boxed{\mu > 1}$



Studiamo ora nei dettagli i casi mancanti.

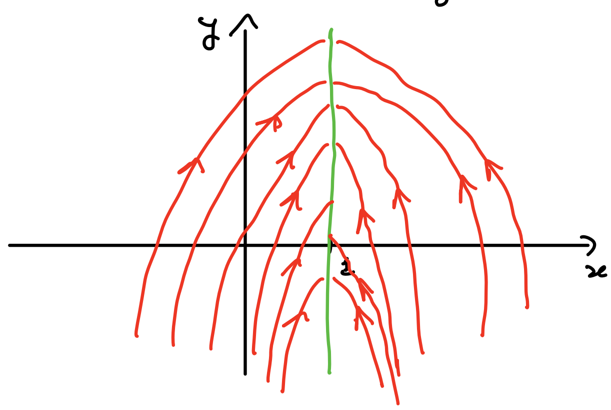
$\boxed{\mu = 0}$ Il sistema si riduce a $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x \\ \dot{y} = (1-x)^2 \end{cases}$

I punti fissi sono allora $\{(1, y)\}$, la retta $x=1$.

E per $x_0 \neq 1$ si può scrivere che le orbite sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

quindi $y(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^2 + \text{cost}$. Ne segue che il ritratto di fase è



$\boxed{\mu = 1}$ Il sistema diventa $\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2 + 1 \\ \dot{y} = (1-x)^2 - y \end{cases}$

Punti fissi $= \{(1,0), (0,1)\}$

$P_1 = (1,0)$ è stella stabile, $P_2 = (0,1)$ è punto di sella e

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori $= \{-3, 1\}$

Autovettori $= \left\{ v_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

<u>Rette invarianti:</u> sia $I(x,y) = ax + by$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$\dot{I}(x,y) = a(-x-y^2+1) + b((1-x)^2-y) =$$
$$= (1-x)[a+b(1-x)] - y[b+ay]$$

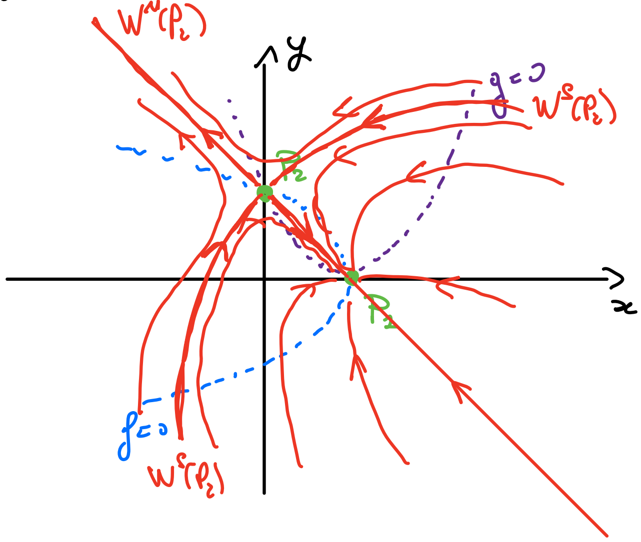
Quindi $\displaystyle \dot{I}\Big|_{\substack{I\equiv c \\ \downarrow \\ b\neq 0}} = (1-x)[a+b(1-x)] - y[b+ay]\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}}$

$$= (1-x)[a+b(1-x)] - \frac{c-ax}{b}\left[b+\frac{a}{b}(c-ax)\right]$$

Ponendo $a=c=1$ si ha

$$\dot{I}\Big|_{I\equiv 1} = (1-x)[1+b(1-x)] - \frac{1}{b}(1-x)\left[b+\frac{1}{b}(1-x)\right]$$
$$= (1-x)\left[1+b(1-x)-1-\frac{1}{b^2}(1-x)\right] = \left(b-\frac{1}{b^2}\right)(1-x)^2 = 0$$
$$\iff b=1\,.$$

Quindi $x+y=1$ è retta invariante.



OSS $\boxed{a=1}$ Facendo il cambiamento di variabile $X=1-x$, $Y=y$ si trova

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dot{x} = x-1+y^2 = -X+Y^2 \\ \dot{Y} = \dot{y} = (1-x)^2-y = X^2-Y \end{cases}$$

che ha la simmetria $\tilde{X}=Y$, $\tilde{Y}=X$, infatti

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \dot{Y} = X^2-Y = \tilde{Y}^2-\tilde{X} \\ \dot{\tilde{Y}} = \dot{X} = -X+Y^2 = -\tilde{Y}+\tilde{X}^2 \end{cases}$$

Il sistema originale è dunque simmetrico rispetto alla retta invariante $X = Y$, ossia $x+y=1$.

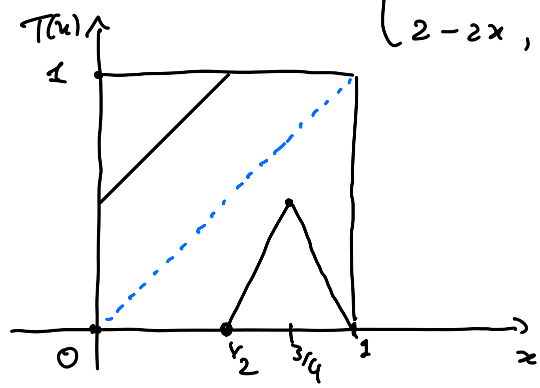
OSS $\boxed{\mu=-1}$ È simile al caso $\mu=1$, con retta invariante $x-y=1$.

ESERCIZIO 3

$T : [0,1] \to [0,1]$

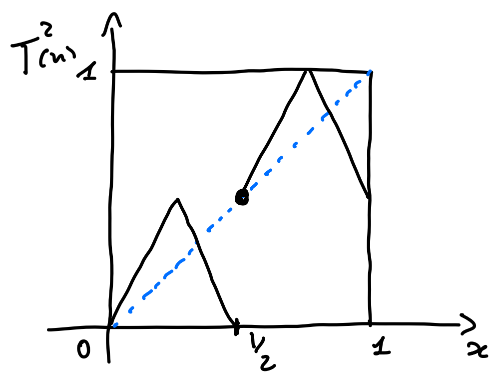
$$T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Il grafico della funzione è



(i) T non ha punti fissi. Studiamo i punti di periodo 2.

Il grafico di T^2 è



Ci sono 4 punti di periodo 2, che è quindi il loro periodo minimo.

A questo punto osserviamo che T^2 si può interpretare come due mappe tenda sugli insiemi $[0, \frac{1}{2})$ e $[\frac{1}{2}, 1]$. Ne segue che T^2 ha punti periodici di periodo minimo n, $\forall n \geq 1$.

Quindi T ha punti periodici di periodo minimo $2n$, $\forall n \geq 1$.

Infine T non può avere punti periodici di periodo dispari perché $T([0,\frac{1}{2})) = [\frac{1}{2},1]$ e $T([\frac{1}{2},1]) = [0,\frac{1}{2}]$ (e $\frac{1}{2}$ ha periodo 2).

(ii) Tutte le orbite periodiche di T sono repulsive. Infatti
$$|(T^2)'(x)| = 2 \quad \forall x \notin \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\}.$$
Quindi se $\bar{x}$ è periodico di periodo $2n$ per T si ha
$$|(T^{2n})'(\bar{x})| = |((T^2)^n)'(\bar{x})| = 2^n > 1 \quad \forall n \geq 1.$$
Dunque l'ω-limite di un $x \in [0,1]$ non periodico non può essere un'orbita periodica. Poiché siamo in un compatto $[0,1]$, deve esistere non-vuoto l'ω-limite per T^2. Inoltre T^2 è continua su $[0,\frac{1}{2})$ e $[\frac{1}{2},1]$, quindi l'ω-limite è invariante per T^2.
Di conseguenza se x non è periodico, $\omega(x)$ non può che essere l'intero intervallo $[0,\frac{1}{2}]$ o l'intero intervallo $[\frac{1}{2},1]$, per T^2 (per la precisione, questo è vero per quasi ogni x non-periodico).
Quindi $\omega(x) = [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$ non periodico (per quasi ogni x).
Se invece x è periodico, allora $\omega(x) = \mathcal{O}(x)$.

(iii) Visto che T^2 si scrive in termini di due mappe tenda, possiamo concludere che T ha un comportamento caotico, sebbene non sia continua, e dunque non rientra nelle definizioni date.