Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 13-01-2020

Esercizio 1. (6+3 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon\, x^3 + 6y^5 + (1-\varepsilon)\, \sin y \\ \dot{y} = -8x^3 + (1-\varepsilon)\, \cos x - 2\varepsilon\, y \end{cases}$$

(i) Per $\varepsilon = 1$, discutere la stabilità dei punti fissi del sistema.

(ii) Per $\varepsilon = 0$, dire se esistono integrali primi del sistema.

Esercizio 2. (8+6 punti) (i) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - y^2 \\ \dot{y} = 4x - x^2 + \mu\, y \end{cases}$$

fissando $\mu = 3$.

(ii) Considerare il caso $\mu = 0$.

Esercizio 3. (2+4+4 punti) Dato l'intervallo $[0,1]$, si consideri la partizione $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ con $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$, e la funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{4}\,, & x \in J_1 \\ x + \frac{1}{2}\,, & x \in J_2 \\ x - \frac{1}{2}\,, & x \in J_3 \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ 2x - \frac{5}{4}\,, & x \in J_4 \end{cases}$$

(i) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

(ii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo 2 e studiarne la stabilità.

(iii) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un'orbita periodica di f di periodo n.

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon\, x^3 + 6y^5 + (1-\varepsilon)\, \sin y \\ \dot{y} = -8x^3 + (1-\varepsilon)\, \cos x - 2\varepsilon\, y \end{cases}$$

(i) Per $\varepsilon = 1$, discutere la stabilità dei punti fissi del sistema.

I punti fissi del sistema sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x^3 + 6y^5 = 0 \\ -8x^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si trova $48y^5 + 2y = 0$, che ha come unica soluzione reale $y = 0$. Dunque l'unico punto fisso è $P = (0,0)$.

Linearizzando il sistema in P si ottiene la matrice

$$A = JF(0,0) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 30y^4 \\ -24x^2 & -2 \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$, quindi P non è iperbolico. Per studiarne la stabilità cerchiamo allora una funzione di Lyapunov.

Poniamo

$$V(x,y) = a\, x^{2n} + b\, y^{2m}$$

con $n, m \in \mathbb{N}$ e $a, b > 0$. Si ottiene

$$\dot{V}(x,y) = 2na\, x^{2n-1}\Big(- x^3 + 6y^5\Big) + 2mb\, y^{2m-1}\Big(- 8x^3 - 2y\Big) =$$

$$= -2na\, x^{2n+2} - 4mb\, y^{2m} + \Big(12na\, x^{2n-1}y^5 - 16mb\, x^3 y^{2m-1}\Big) < 0\,, \quad \forall\, (x,y) \neq (0,0)$$

se $2n-1 = 3$, $2m-1 = 5$ e $12na = 16mb$. Si ricava quindi che

$$V(x,y) = 2x^4 + y^6$$

è una funzione di Lyapunov stretta per P, che risulta quindi essere un punto fisso asintoticamente stabile.

(ii) Per $\varepsilon = 0$, dire se esistono integrali primi del sistema.

Un possibile modo per studiare l'esistenza di integrali primi del sistema è quello di trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x^3 + \cos x}{6y^5 + \sin y}$$

L'equazione è a variabili separabili e si ottiene che le soluzioni sono della forma

$$y^6 - \cos y = -2x^4 + \sin x + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. Ne segue che un integrale primo del sistema è la funzione

$$I(x,y) = 2x^4 + y^6 - \sin x - \cos y\,.$$

Esercizio 2. *(i) Disegnare il ritratto di fase del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - y^2 \\ \dot{y} = 4x - x^2 + \mu\, y \end{cases}$$

fissando $\mu = 3$.

I punti critici del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 4y - y^2 = 0 \\ 4x - x^2 + 3y = 0 \end{cases}$$

che sono

$$P_1 = (0,0)\,, P_2 = (4,0)\,, P_3 = (-2,4)\ ,\ \text{e } P_4 = (6,4)$$

Il campo di vettori ha matrice jacobiana

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 4-2y \\ 4-2x & 3 \end{pmatrix}$$

dunque per i punti critici otteniamo:
$P_1 = (0,0)$. La linearizzazione in P_1 ha matrice

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{73}}{2}$. Dunque P_1 è un punto iperbolico di tipo sella con varietà instabile e stabile tangenti rispettivamente ai due autovettori

$$v_+ = \Big(1, \frac{3+\sqrt{73}}{8}\Big) \quad \text{e} \quad v_- = \Big(1, \frac{3-\sqrt{73}}{8}\Big)$$

$P_2 = (4,0)$. La linearizzazione in P_2 ha matrice

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{3\pm i\sqrt{55}}{2}$. Dunque P_2 è un punto iperbolico di tipo fuoco instabile
$P_3 = (-2,4)$. La linearizzazione in P_3 ha matrice

$$JF(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm i\sqrt{119}}{2}$. Dunque P_3 è un punto iperbolico di tipo fuoco instabile
$P_4 = (6,4)$. La linearizzazione in P_4 ha matrice

$$JF(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{137}}{2}$. Dunque P_4 è un punto iperbolico di tipo sella con varietà instabile e stabile tangenti rispettivamente ai due autovettori

$$v_+ = \left(1, -\frac{3+\sqrt{137}}{8}\right) \quad \text{e} \quad v_- = \left(1, -\frac{3-\sqrt{137}}{8}\right)$$

Per disegnare il ritratto di fase è utile poi studiare il segno del campo di vettori, e l'esistenza di rette invarianti e orbite periodiche. Si verifica che non possono esistere rette invarianti. Inoltre si ha

$$\mathrm{div}(\mathrm{F}) = 3 > 0\,, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e quindi per il criterio di Bendixson non esistono orbite periodiche.

Mettendo insieme le informazioni che abbiamo ottenuto, e osservando che le orbite non possono avere asintoti paralleli a uno degli assi, un possibile ritratto di fase è quello in figura 1.

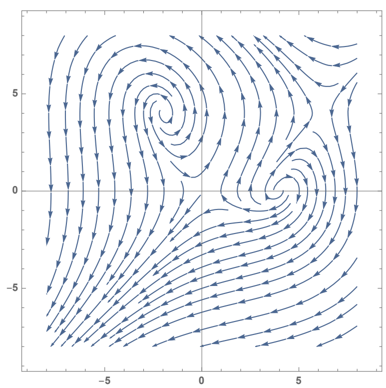

Figure 1: Il ritratto di fase dell'esercizio 2-(i).

(ii) Considerare il caso $\mu = 0$.

Per $\mu = 0$, i punti fissi sono

$$P_1 = (0,0)\,, P_2 = (4,0)\,, P_3 = (0,4)\ , \text{ e } P_4 = (4,4)$$

e lo studio della loro stabilità tramite il linearizzato del sistema ci dice che P_1 e P_4 sono ancora selle, e gli autovettori sono per entrambi i punti

$$v_+ = \left(1, 1\right) \quad \text{e} \quad v_- = \left(1, -1\right)$$

Invece, i punti P_2 e P_3 sono centri lineari, quindi sono punti non iperbolici e la loro natura può cambiare nel sistema non lineare.

Osserviamo inoltre che in questo caso si ha

$$\mathrm{div}(\mathrm{F}) = 0\,, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e quindi nulla possiamo concludere per l'esistenza di orbite periodiche, che per il criterio dell'indice di Poincaré potrebbero trovarsi intorno a P_2 e P_3.

Come utili indicazioni per disegnare il ritratto di fase, si osserva che il sistema è simmetrico rispetto alla retta $y = x$, quindi se $(x(t), y(t))$ è una soluzione allora lo è anche $(y(t), x(t))$. In particolare, osserviamo che la retta $y = x$ è invariante.

Infine, il ritratto di fase del sistema di può disegnare se osserviamo che le soluzioni dell'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^2}{4y - y^2}$$

sono della forma

$$2y^2 - \frac{1}{3}y^3 = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. Si ottiene infatti che il sistema ammette un integrale primo dato da

$$I(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$$

Il ritratto di fase è quindi quello in figura 2.

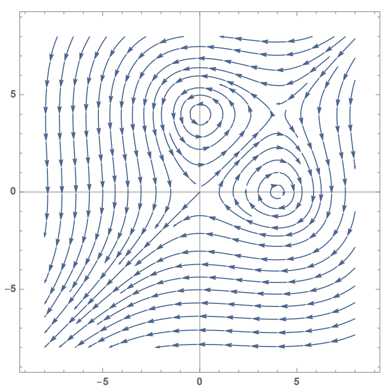

Figure 2: Il ritratto di fase dell'esercizio 2-(ii).

Esercizio 3. *Dato l'intervallo* $[0,1]$*, si consideri la partizione* $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ *con* $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$*,* $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$*,* $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ *e* $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$*, e la funzione* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{4}\,, & x \in J_1 \\ x + \frac{1}{2}\,, & x \in J_2 \\ x - \frac{1}{2}\,, & x \in J_3 \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ 2x - \frac{5}{4}\,, & x \in J_4 \end{cases}$$

(i) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

Il grafico di $f(x)$ è nella figura 3, e si ottiene che: J_1 ricopre una volta J_2 e J_3; J_2 ricopre una volta J_4; J_3 ricopre una volta J_1; J_4 ricopre una volta J_2 e J_3. Dunque l'f-grafo è quello in figura 4.

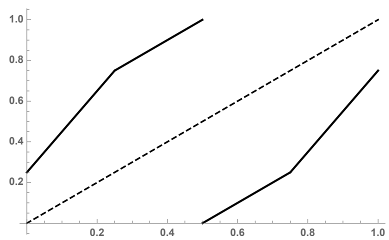

Figure 3: Il grafico di $f(x)$.

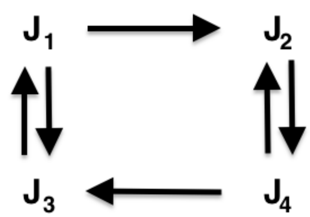

Figure 4: L'f-grafo di $\mathcal{J}$.

(ii) Dire se esiste un'orbita periodica di periodo 2 e studiarne la stabilità.

Per studiare l'esistenza di orbite periodiche di periodo 2 possiamo disegnare il grafico di f^2 e cercare i suoi punti fissi che non siano anche punti fissi di f. In questo caso f non ha punti fissi, e il grafico di f^2 è quello in figura 5. Otteniamo quindi che esiste un'unica orbita periodica di periodo

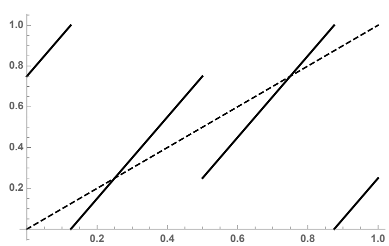

Figure 5: Il grafico di $f^2(x)$.

2, e possiamo anche ricavare esplicitamente che si tratta dell'orbita data dai punti $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$. Inoltre, nonostante f non sia derivabile in $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, risulta che f^2 lo è e si ha

$$(f^2)'\left(\frac{1}{4}\right) = (f^2)'\left(\frac{3}{4}\right) = 2\,.$$

Ne segue che l'orbita è repulsiva.

(iii) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ *esiste un'orbita periodica di* f *di periodo* n.

La funzione non è continua dunque non possiamo applicare il Teorema di Sharkovskii. Essendo però f continua se ristretta a ciascun elemento della partizione $\mathcal{J}$, possiamo utilizzare l'f-grafo per ottenere informazioni sull'esistenza di punti periodici.

In particolare si ricava che non possono esistere orbite periodiche di periodo dispari, e che invece per ogni n pari è possibile trovare un cammino ammissibile di lunghezza $n+1$ che parta da J_1 e torni in J_1, e in modo che il punto periodico associato al cammino abbia periodo n minimo. Nel punto (ii) abbiamo trattato il caso $n = 2$, e per $n \geq 4$ e pari basta infatti inserire cicli del tipo $J_2 J_4 J_2$ oppure $J_3 J_1 J_3$ nel cammino ammissibile $J_1 J_2 J_4 J_3 J_1$.