

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 11-01-2023

Esercizio 1. (15 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\mu - 2x^2 - y^2)y - x \end{cases}$$

determinare l'esistenza di orbite periodiche al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 + \lambda(3x^2 - 4x + 1), & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

per $\lambda \in (0, 3]$.

- (a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi al variare del parametro λ .
- (b) Dimostrare che esiste $\lambda_0 \in (0, 3)$ tale che il sistema è caotico per ogni $\lambda \in [\lambda_0, 3]$.

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\mu - 2x^2 - y^2)y - x \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

Il sistema ha un unico punto fisso $P = (0,0)$, dunque se un'orbita periodica esiste deve necessariamente circondare P per la teoria dell'indice di Poincaré.

La matrice jacobiana del campo verifica

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4xy-1 & \mu-2x^2-3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

e dunque $\det JF(0,0) = 1$, $\text{tr} JF(0,0) = \mu$. Ne segue che gli autovalori di $JF(0,0)$ sono $\lambda_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$, e verificano

- $\mu < -2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, 0)$, P è un nodo asintoticamente stabile
- $\mu = -2$, $\lambda_1 = \lambda_2 \in (-\infty, 0)$, P è un nodo improprio asintot. stabile
- $-2 < \mu < 0$, λ_1, λ_2 complessi coniugati, P è un fuoco asintoticamente stabile
- $\mu = 0$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i$, P è un centro non iperbolico
- $0 < \mu < 2$, λ_1, λ_2 complessi coniugati, P è un fuoco instabile
- $\mu = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 \in (0, +\infty)$, P è un nodo improprio instabile
- $\mu > 2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, +\infty)$, P è un nodo instabile

Questo studio preliminare della stabilità di P non è indispensabile, evita però la comprensione di cose accadute nello spazio delle fasi.

Per studiare l'eventuale non esistenza di orbite periodiche calcoliamo

$$\text{div} F(x,y) = \text{tr} JF(x,y) = \mu - 2x^2 - 3y^2$$

Dunque se $\mu < 0$ si ha $\text{div} F(x,y) = \mu < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e

per il Metodo di Bendixson-Dulac non esistono orbite periodiche.

Se $\mu = 0$ si ha $\operatorname{div} F(x,y) = -2x^2 - 3y^2 < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e

$\operatorname{div} F(0,0) = 0$. Possiamo ripetere la dimostrazione del Metodo di

Bendixson-Dulac osservando che in ogni dominio $U \subset \mathbb{R}^2$ vale

$\iint_U \operatorname{div} F(x,y) \, dx \, dy < 0$ visto che $(0,0)$ ha misura zero. Dunque anche in questo caso non esistono orbite periodiche.

Se $\mu > 0$ invece $\operatorname{div} F(x,y) > 0$ per (x,y) sufficientemente vicino a $(0,0)$,

e $\operatorname{div} F(x,y) < 0$ per (x,y) sufficientemente lontano da $(0,0)$. Il punto $P = (0,0)$ è

instabile quindi possiamo provare a dimostrare l'esistenza di un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ che soddisfi le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixson.

Scriviamo il sistema in coordinate polari:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{\rho} (xy + (\mu - 2x^2 - y^2)y^2 - xy) = \rho \sin^2 \vartheta (\mu - \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \vartheta) \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{\rho^2} ((\mu - 2x^2 - y^2)xy - x^2 - y^2) = -1 + \sin \vartheta \cos \vartheta (\mu - \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \vartheta) \end{cases}$$

Scegliamo $D = \{ \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \}$ con $\rho_0 > 0$. Quindi $P \notin D$ e sappiamo che non

ci sono altri punti fissi, quindi D non contiene punti fissi. Osserviamo che

$$\mu - 2\rho^2 \leq \mu - \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq \mu - \rho^2 \quad \forall (\rho, \vartheta)$$

quindi ponendo $\rho_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}$ si ha

$$\dot{\rho}|_{\rho=\rho_0} \geq \rho_0 \sin^2 \vartheta (\mu - 2\rho_0^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu} \sin^2 \vartheta \cdot \frac{\mu}{2} \geq 0 \quad \forall \vartheta$$

$$\text{e } \dot{\rho}|_{\rho=\rho_0} = 0 \Leftrightarrow \sin \vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \{0, \pi\}.$$

e ponendo $\rho_1 = 2\sqrt{\mu}$ si ha

$$\dot{\rho}|_{\rho=\rho_1} \leq \rho_1 \sin^2 \vartheta (\mu - \rho_1^2) = 2\sqrt{\mu} \sin^2 \vartheta \cdot (-3\mu) \leq 0 \quad \forall \vartheta$$

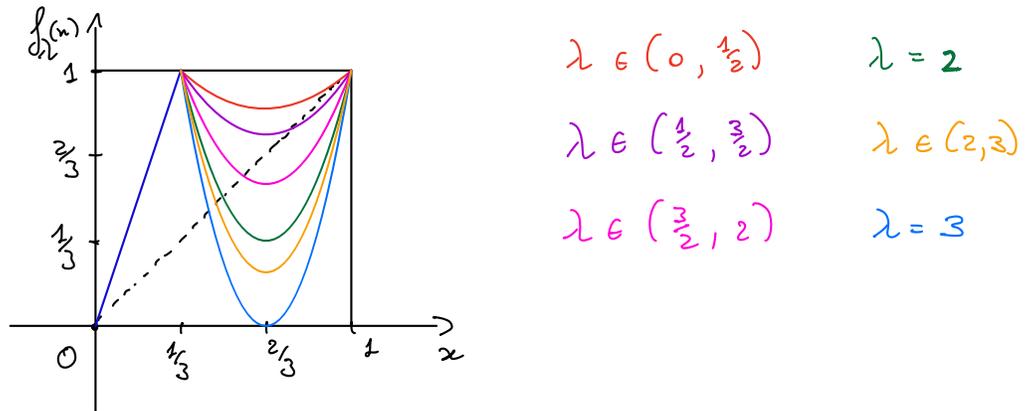
$$e \dot{\rho}|_{\rho=\rho_1} = 0 \Leftrightarrow \sin \vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \{0, \pi\}.$$

Ne segue che $D = \{ \frac{1}{2} \sqrt{\mu} \leq \rho \leq 2\sqrt{\mu} \}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixon. Infatti se scegliamo $(x_0, y_0) \in \{ \rho = 2\sqrt{\mu} \}$ con $y_0 \neq 0$, si ha che $\mathcal{O}^+(x_0, y_0) \subset D$ (osserviamo che $\dot{\rho}|_{\sin \vartheta = 0} = -1$, quindi l'orbita di (x_0, y_0) non può uscire da D dai punti in cui $\sin \vartheta = 0$). Quindi esiste un'orbita periodica $\Gamma \subset D$.

**ESERCIZIO
2**

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 + \lambda(3x^2 - 4x + 1), & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \quad \lambda \in (0, 3]$$

Poniamo $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Si ha $g(\frac{1}{3}) = g(1) = 0$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ e $g(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$. Quindi possiamo disegnare il grafico di f_{λ} per alcuni valori di $\lambda \in (0, 3]$.



(i) Per ogni $\lambda \in (0, 3]$ ci sono almeno due punti fissi: $P_1 = 0$, $P_2 = 1$.

(P_1) Si ha $f'_{\lambda}(0) = 3$, quindi P_1 è repulsivo $\forall \lambda \in (0, 3]$

(P_2) Si ha $f'_{\lambda}(1) = \lambda g'(1) = 2\lambda$, quindi

- $|2\lambda| < 1$ se $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ e P_2 è attrattivo
- $|2\lambda| > 1$ se $\lambda \in (\frac{1}{2}, 3]$ e P_2 è repulsivo

- se $\lambda = \frac{1}{2}$, $f'_\lambda(1) = 1$ e $f''_\lambda(1) = 3 > 0$, e quindi P_2 è attrattivo (da sinistra).

Cerchiamo altri punti fissi in $[\frac{1}{3}, 1]$, quindi soluzioni di

$$1 + \lambda(3x^2 - 4x + 1) = x \quad \text{con } x \in [\frac{1}{3}, 1], x \neq 1.$$

$$1 + \lambda(3x^2 - 4x + 1) = x \iff 3\lambda x^2 - (4\lambda + 1)x + (\lambda + 1) = 0$$

$$\iff (x-1)(3\lambda x - \lambda - 1) = 0$$

Troviamo quindi $x = \frac{\lambda+1}{3\lambda} \in [\frac{1}{3}, 1) \iff 1 \leq \frac{\lambda+1}{\lambda} < 3 \iff \lambda \in (\frac{1}{2}, 3]$

Quindi se $\lambda \in (\frac{1}{2}, 3]$ esiste il punto fisso $P_3 = \frac{\lambda+1}{3\lambda}$.

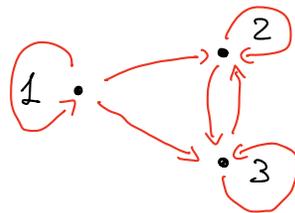
Si ha $f'_\lambda(P_3) = \lambda g'(\frac{\lambda+1}{3\lambda}) = 2 - 2\lambda$, e quindi

- $|2 - 2\lambda| < 1 \implies \lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e P_3 è attrattivo
- (P_3) • $|2 - 2\lambda| > 1 \implies \lambda \in (\frac{3}{2}, 3]$ e P_3 è repulsivo
- se $\lambda = \frac{3}{2}$ si ha $f'_\lambda(P_3) = -1$, e $f''_\lambda(P_3) = 9$, $f'''_\lambda(P_3) = 0$, quindi $Sf_\lambda(P_3) < 0$ e P_3 è attrattivo

(ii) Per dimostrare che f_λ è caotica possiamo verificare una delle condizioni equivalenti, in questo caso studiamo l'esistenza di un'orbita di periodo minimo 3.

Sia $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$ una partizione di $[0, 1]$.

Per ogni $\lambda \in [2, 3]$ il f_λ -graf associato è



che ha il cammino ammissibile $J_2 J_3 J_3 J_2$. Quindi $\exists \bar{x} \in J_2$ t.c.

$f_\lambda^3(\bar{x}) = \bar{x}$, e $f_\lambda(\bar{x}), f_\lambda^2(\bar{x}) \in J_3$. Poiché $J_2 \cap J_3 = \{\frac{2}{3}\}$ che non è un punto

fisso per $\lambda \in [2, 3]$, \bar{x} è un punto periodico di periodo minimo 3, e

quindi f_λ è caotica $\forall \lambda \in [2, 3]$.