Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 10-09-2012

Esercizio 1. (18 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + x\,y^3$$

i) trovarne tutti i punti critici e caratterizzarli come punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme limitato D che ha come frontiera il triangolo di vertici $Q_1 = (0, 0)$, $Q_2 = (1, 0)$ e $Q_3 = (0, 1)$;

iii) usando solo il fatto che $f(-1, 0) = f(1, 0)$ possiamo concludere che la funzione f ha un punto critico vincolato sul segmento che unisce $(-1, 0)$ a $(1, 0)$? (*la risoluzione di questo punto utilizzando l'espressione esplicita della funzione f sarà considerata nulla*)

Esercizio 2. (7 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^3 z - y^2 + \log(1 + x^2 z^2) + z = 0\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0,\, -1,\, 1)$;

ii) scrivere una parametrizzazione locale per Σ in un intorno del punto $P = (0,\, -1,\, 1)$.

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'area dell'insieme $D = A \cap B$ dove

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \leq x,\, y \leq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \geq \min(x, 1)\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = (x^2-1)^2 + x\,y^3$$

i) trovarne tutti i punti critici e caratterizzarli come punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su tutto il suo dominio, quindi cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x\,(x^2-1) + y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$, si trova che i punti critici liberi sono

$$P_1 = (-1,\,0) \qquad P_2 = (0,\,0) \qquad P_3 = (1,\,0)$$

Per caratterizzare i punti critici possiamo provare a usare la matrice Hessiana di f che è una matrice simmetrica, perché f è almeno di classe C^2 sul dominio. La matrice Hessiana di f è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

Troviamo che

$$H_f(-1,0) = H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una matrice con determinante nullo e autovalori $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 0$. La matrice è quindi semi-definita positiva e non è sufficiente per caratterizzare P_1 e P_3. La presenza di un autovalore positivo permette solo di concludere che almeno in una direzione i punti sono di minimo locale. Per capire cosa succede in un intorno di P_1 notiamo che se consideriamo la restrizione di f alla retta $\{x=-1\}$ si ottiene $f(-1,y) = -y^3$, una funzione di una variabile che ha in $y=0$ un punto di sella. Quindi possiamo concludere che P_1 è un punto di sella. Analogamente avviene per il punto P_3, che risulta quindi essere un punto di sella.

Studiamo ora il punto P_2. Troviamo

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una matrice con determinante nullo e autovalori $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 0$. La matrice è quindi semi-definita negativa e nuovamente non è sufficiente per caratterizzare P_2. La presenza di un autovalore negativo permette solo di concludere che almeno in una direzione P_2 è di massimo locale. Capire cosa succede in un intorno di P_2 è più complicato. Chiediamoci se in un qualunque intorno di P_2 è possibile trovare un punto $Q = (x,y)$ con $f(x,y) > f(0,0) = 1$. Se questo risultasse essere vero, anche P_2

sarebbe un punto di sella. Restringiamo la funzione f alla curva $x(t) = t$, $y(t) = t^\alpha$ con $\alpha > 0$. Otteniamo

$$f(t, t^\alpha) = t^4 - 2t^2 + 1 + t^{1+3\alpha}$$

Se vogliamo che per ogni $\epsilon > 0$ esista un t con $|t| < \epsilon$ tale che $f(t, t^\alpha) > 1$ basta scegliere $\alpha < \frac{1}{3}$. Infatti, si ottiene

$$f(t, t^\alpha) - 1 = t^4 - 2t^2 + t^{1+3\alpha} = t^{1+3\alpha}\left(1 - 2t^{1-3\alpha} + t^{3-3\alpha}\right)$$

che è una funzione che verifica

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^\alpha) - 1 = 0$$

assumendo però valori positivi. Quindi anche P_2 è un punto di sella.

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme limitato D che ha come frontiera il triangolo di vertici $Q_1 = (0,0)$, $Q_2 = (1,0)$ e $Q_3 = (0,1)$;

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su D dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità e non ci sono punti critici liberi interni a D, infatti i punti critici P_2 e P_3 sono sul bordo di D e P_1 è esterno a D. Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, dividiamo il bordo in tre parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = (t^2 - 1)^2, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1 \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -3t^3 + 4t^2 \qquad t \in [0,1]$$

e le studiamo separatamente.

La funzione g_1 ha derivata $g_1'(t) = 4t(t^2 - 1) < 0$ per $t \in (0,1)$, e quindi non ha punti critici in $(0,1)$ e i suoi valori di massimo e minimo sono assunti agli estremi dell'intervallo. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (0,0), \quad Q_2 = \gamma_1(1) = (1,0)$$

La funzione g_2 è costante e quindi consideriamo il valore in un punto qualsiasi, ad esempio l'estremo Q_1.

La funzione g_3 ha derivata $g_3'(t) = -9t^2 + 8t = t(-9t + 8)$ che nell'intervallo $(0, 1)$ si annulla solo in $t_3 = \frac{8}{9}$, che è un punto di massimo locale. Quindi, i punti da considerare sono

$$Q_3 = \gamma_3(0) = (1, 0), \quad Q_4 = \gamma_3(t_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}\right), \quad Q_5 = \gamma_3(1) = (0, 1)$$

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f(Q_1) = f(Q_5) = 1,\ f(Q_2) = f(Q_3) = 0,\ f(Q_4) = -3\left(\frac{8}{9}\right)^3 + 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

Quindi

$$\max_D f = \frac{256}{243}, \qquad \min_D f = 0$$

iii) usando solo il fatto che $f(-1, 0) = f(1, 0)$ possiamo concludere che la funzione f ha un punto critico vincolato sul segmento che unisce $(-1, 0)$ a $(1, 0)$? (la risoluzione di questo punto utilizzando l'espressione esplicita della funzione f sarà considerata nulla)

La funzione f ha un punto critico vincolato sul segmento $\gamma(t) = (2t - 1, 0)$, con $t \in [0, 1]$, che unisce $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ se esiste $t_0 \in (0, 1)$ con

$$< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) >= 0$$

Alla funzione f è possibile applicare il Teorema del Valor Medio, secondo cui nel segmento che unisce $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ esiste un punto ξ interno al segmento per cui

$$f(1, 0) - f(-1, 0) =< \nabla f(\xi), (1, 0) - (-1, 0) >$$

Usando il fatto che $f(-1, 0) = f(1, 0)$ e che $\gamma'(t) = (2, 0)$ per ogni $t \in (0, 1)$, abbiamo quindi

$$0 =< \nabla f(\xi), (2, 0) >=< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) >$$

con $\xi = \gamma(t_0)$.

Altre risoluzioni che usano il Teorema di Weierstrass o il Teorema di Lagrange per la restrizione di f al segmento che unisce $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ sono state considerate corrette, almeno in parte proporzionale alla spiegazione fornita.

Esercizio 2. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^3 z - y^2 + \log(1 + x^2 z^2) + z = 0\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0,\ -1,\ 1)$;

La superficie Σ è un insieme di livello della funzione

$$F(x, y, z) = x^3 z - y^2 + \log(1 + x^2 z^2) + z$$

che è di classe C^1 sul suo dominio. Per il corollario del Teorema delle Funzioni Implicite, se $\nabla F(P) \neq 0$ esiste il piano tangente e $\nabla F(P)$ ne rappresenta il vettore normale. Si trova

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2z + \frac{2xz^2}{1+x^2z^2} \\ -2y \\ x^3 + \frac{2x^2z}{1+x^2z^2} + 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \nabla F(0,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto P è data da

$$0 \cdot (x-0) + 2 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-1) = 0$$

quindi da

$$2y + z + 1 = 0$$

ii) scrivere una parametrizzazione locale per Σ in un intorno del punto $P = (0,\,-1,\,1)$.

Applicando il Teorema delle Funzioni Implicite alla funzione $F(x,y,z)$ nel punto P si ottiene che la superficie Σ si può esprimere localmente come superficie cartesiana se $\nabla F(P) \neq 0$. Abbiamo trovato prima che

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

quindi abbiamo due scelte: trovare una funzione $g(x,z)$ tale che $F(x, g(x,z), z) = F(P)$ e $g(0,1) = -1$, oppure una funzione $h(x,y)$ tale che $F(x,y,h(x,y)) = F(P)$ e $h(0,-1) = 1$. Per trovare esplicitamente la funzione g o la funzione h bisogna risolvere l'equazione associata. Delle due la più semplice da risolvere è quella per la funzione g, ossia

$$x^3z - g(x,z)^2 + \log(1+x^2z^2) + z = 0$$

da cui

$$g(x,z) = \pm\sqrt{x^3z + \log(1+x^2z^2) + z}$$

Imponendo poi $g(0,1) = -1$ si trova

$$g(x,z) = -\sqrt{x^3z + \log(1+x^2z^2) + z}$$

Una parametrizzazione locale per Σ è quindi data dalla funzione

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ -\sqrt{u^3v + \log(1+u^2v^2) + v} \\ v \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Calcolare l'area dell'insieme $D = A \cap B$ dove*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq x,\, y \leq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq \min(x, 1)\right\}$$

L'insieme D è dato dall'intersezione delle due zone evidenziate in figura 1, che sono gli insiemi A e B.

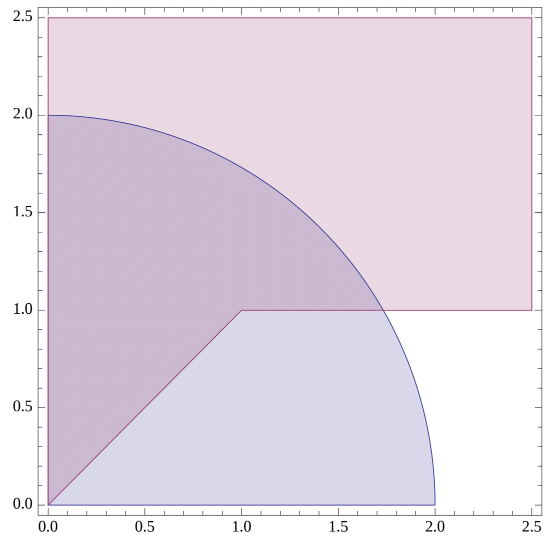

Figure 1: L'insieme D

L'area di D si può calcolare quindi dividendo l'insieme in due zone e sommarne le aree. La suddivisione si può fare in vari modi, e si potrebbe anche fare il conto dell'area del complementare di D in A usando semplicemente la geometria euclidea. Tra i vari metodi scegliamo di scrivere $D = D_1 \cup D_2$ dove D_1 e D_2 sono due insiemi semplici dati da

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\, 1 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

Si trova

$$\text{Area}(D_1) = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\right) dx = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_0^1 x\, dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Area}(D_2) = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_1^{\sqrt{3}} 1\, dx = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$$

Quindi

$$\text{Area}(D) = \text{Area}(D_1) + \text{Area}(D_2) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 10-09-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (18 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^3\,y + (y^2-1)^2$$

i) trovarne tutti i punti critici e caratterizzarli come punti di minimo locale, di massimo locale o di sella;

ii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme limitato D che ha come frontiera il triangolo di vertici $Q_1 = (0,0)$, $Q_2 = (1,0)$ e $Q_3 = (0,1)$;

iii) usando solo il fatto che $f(0,-1) = f(0,1)$ possiamo concludere che la funzione f ha un punto critico vincolato sul segmento che unisce $(0,-1)$ a $(0,1)$? (*la risoluzione di questo punto utilizzando l'espressione esplicita della funzione f sarà considerata nulla*)

Esercizio 2. (7 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^3y + \log(1+x^2y^2) + y + z^2 = 0\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0,\,-1,\,1)$;

ii) scrivere una parametrizzazione locale per Σ in un intorno del punto $P = (0,\,-1,\,1)$.

Esercizio 3. (10 punti) Calcolare l'area dell'insieme $D = A \cap B$ dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \le 4,\, x \ge 0,\, y \ge 0\right\}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \le y,\, x \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \ge \min(y,1)\right\}$$