Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 10-06-2010

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2 + 3}$$

i) determinare il dominio;

ii) trovare tutti i punti critici liberi;

iii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile ricordare che* $\cos^4 t = \sin^4 t - 2\sin^2 t + 1$)

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 3. (12 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

ii) dire se è conservativo;

iii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma(t) = \Big(3 + \log(2 + \sin t),\ \cos t\Big)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Svolgimento

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2 + 3}$$

i) determinare il dominio;

Il dominio della funzione è l'insieme

$$\text{Dominio} = \left\{((x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2 + 3 \geq 0\right\}$$

che è il complementare della parte scurita nella figura 1

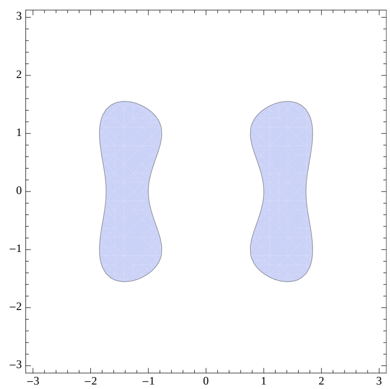

Figure 1: Il complementare del dominio di f

ii) trovare tutti i punti critici liberi;

Bisogna trovare in punti nel dominio che annullano il gradiente. Intanto si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x^3-4x}{\sqrt{x^4+y^4-4x^2-2y^2+3}} \\ \frac{2y^3-2y}{\sqrt{x^4+y^4-4x^2-2y^2+3}} \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ si ottengono nove punti

$$(0,0),\ (0,1)\,,\ (0,-1)\,,\ \left(\sqrt{2},0\right),\ \left(\sqrt{2},1\right),\ \left(\sqrt{2},-1\right),\ \left(-\sqrt{2},0\right),\ \left(-\sqrt{2},1\right),\ \left(-\sqrt{2},-1\right)$$

che annullano i numeratori. Imponendo che i punti siano nel dominio restano ammissibili solo tre punti

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (0,1)\,,\ P_3 = (0,-1)$$

che sono quindi tutti i punti critici liberi di f.

iii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile ricordare che* $\cos^4 t = \sin^4 t - 2\sin^2 t + 1$)

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

L'unico punto critico libero interno a D è $P_1 = (0,0)$.

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, usiamo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

per il bordo di D e sostituiamo in f, ottenendo la funzione di una variabile

$$g(t) = f(\cos t,\ \sin t) = \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t - 4\cos^2 t - 2\sin^2 + 3} =$$

usando il suggerimento

$$= \sqrt{2\sin^4 t - 4\cos^2 t - 4\sin^2 + 4} = \sqrt{2\sin^4 t} = \sqrt{2}\ \sin^2 t$$

Quindi derivando

$$g'(t) = 2\sqrt{2}\ \sin t\ \cos t$$

che si annulla per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Troviamo quindi i quattro punti critici vincolati

$$Q_1 = (1,0),\ Q_2 = (0,1),\ Q_3 = (-1,0),\ Q_4 = (0,-1)$$

In questo caso non ci sono spigoli del bordo né punti di non derivabilità della funzione.

Quindi dobbiamo confrontare i cinque valori

$$f(P_1) = \sqrt{3},\ f(Q_1) = 0,\ f(Q_2) = \sqrt{2},\ f(Q_3) = 0,\ f(Q_4) = \sqrt{2}$$

e concludiamo

$$\max_D f = \sqrt{3}, \quad \min_D f = 0$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme Ω su cui integrare la funzione $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è quello nella figura 2. La forma di Ω e

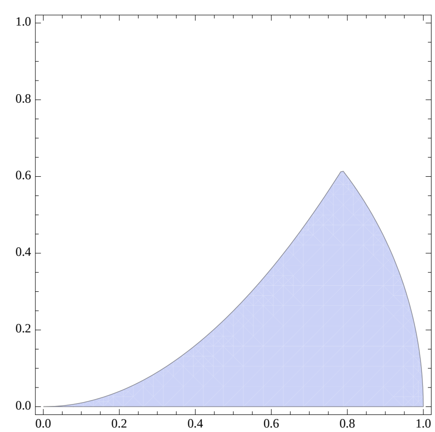

Figure 2: L'insieme Ω

la funzione suggeriscono di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate polari. Poniamo quindi

$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ e $y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, e sostituendo in Ω otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ,θ) è l'insieme D dato da

$$D = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty), \times[0,2\pi] \ : \ \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0,\ \sin\theta \leq \rho\cos^2\theta,\ \rho \leq 1\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\theta) \ : \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \leq \rho \leq 1\right\} = \left\{(\rho,\theta) \ : \ 0 \leq \theta \leq \bar{\theta},\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \leq \rho \leq 1\right\}$$

per un valore $\bar{\theta}$ da trovare, si veda la figura 3. La restrizione da $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ a $\theta \leq \bar{\theta}$ deriva dalla condizione

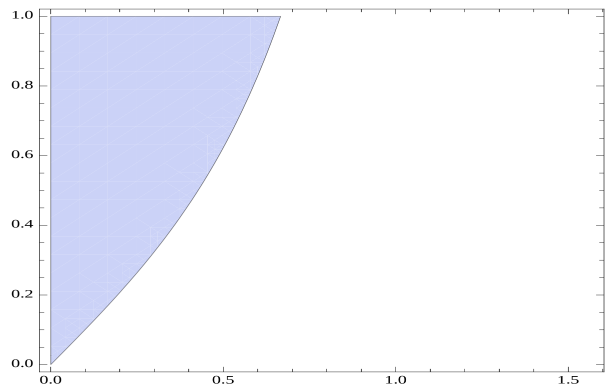

Figure 3: L'insieme D con θ in ascissa e ρ in ordinata.

$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \leq 1$, che come si vede nella figura 3 è verificata solo per θ minore di un valore $\bar{\theta}$. Il valore di $\bar{\theta}$ si ottiene risolvendo $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 1$ in $(0, \frac{\pi}{2})$, oppure ponendo $\sin\bar{\theta} = \bar{y}$ o $\cos\bar{\theta} = \bar{x}$, dove $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ è la soluzione in $(0,1)\times(0,1)$ del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_D \frac{1}{\rho}\ \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\bar{\theta}} \left(\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1 1\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\bar{\theta}} \left(1 - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta = \left(\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)\Big|_0^{\bar{\theta}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} + 1$$

Esercizio 3. Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) dire se è irrotazionale;

Per un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$rot(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Quindi **F** è irrotazionale.

ii) dire se è conservativo;

Il dominio di **F** è l'insieme

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

che non è semplicemente connesso. Dobbiamo quindi studiare il lavoro di **F** lungo una curva chiusa intorno all'origine, ad esempio la circonferenza

$$\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ottiene dalla formula

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) > \, dt = \int_0^{2\pi} \left[(\cos t - \sin t)\,(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\,(\cos t)\right] dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Quindi il campo non è conservativo.

iii) calcolare il lavoro di **F** lungo la curva $\gamma(t) = \Big(3 + \log(2 + \sin t),\ \cos t\Big)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Possiamo applicare il Teorema del Rotore (o il suo corollario per campi irrotazionali) se valgono le seguenti condizioni (le ipotesi del teorema): il campo deve essere differenziabile; la curva deve essere chiusa, di classe C^1 a tratti e orientata positivamente; la parte interna U della curva deve essere contenuta nel dominio del campo.

Verifichiamo le condizioni nel nostro caso. Il campo è differenziabile perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni differenziabili. La curva è chiusa perché $\gamma(0) = (3 + \log 2,\, 1) = \gamma(2\pi)$, è di classe C^1 perché le sue componenti si ottengono come composizione di funzioni di classe C^1, e l'orientazione la possiamo ignorare perché cambierebbe solo il segno, ma essendo il campo irrotazionale il lavoro sarà nullo, quindi non cambia niente (nel corollario per campi irrotazionali infatti l'orientazione non viene menzionata). Infine bisogna verificare che $(0,0) \notin U$. Per far questo si può disegnare la curva (vedi figura 4) oppure basta

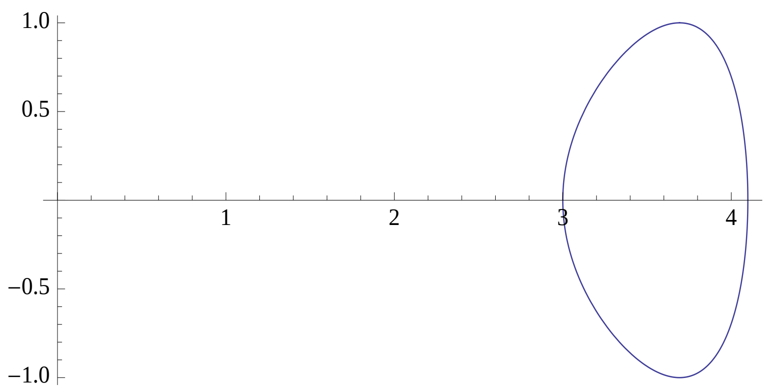

Figure 4: La curva γ

osservare che $\min_t\, x(t) = 3$ e quindi $(0,0)$ non può essere nella parte interna della curva.

Applichiamo quindi il Teorema del Rotore e concludiamo che

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U rot(\mathbf{F})\, dxdy = 0$$