Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 09-06-2020

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1 (2 punti). Data la funzione

$$f(x,y) = x + \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

quale affermazione è corretta?

- f non è differenziabile in $(0,0)$;
- f non è continua in $(0,0)$;
- le derivate parziali di f in $(0,0)$ esistono e sono diverse;
- le derivate parziali di f in $(0,0)$ esistono e sono uguali;
- nessuna delle altre.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$$

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 4\,,\, 0 \leq y \leq x\right\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'area di

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 3x^2 - 2x \leq y \leq 2 - 3x\right\}$$

Esercizio 4 (1 punto). Data la curva (γ, I) e il punto P del suo sostegno Γ

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = (2\cos t\,,\, 2\sin t)$$

$$P = (0\,,\, 2)$$

dire quale punto appartiene alla retta tangente a Γ in P:

- $(0,1)$
- $(1,2)$
- $(2,1)$
- $(0,0)$

- nessuna delle altre

Esercizio 5 (1 punto). Data la superficie Σ

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^3 + z - 1 = 0\right\}$$

possiamo affermare che si tratta di:

- una superficie cartesiana;
- una superficie di rotazione;
- un piano;
- un ellissoide;
- nessuna delle altre.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x, y)$ ha dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$ e si può scrivere come $f(x, y) = x + h(g(x, y))$, dove $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $h(t) = \cos t$. Quindi per i teoremi di carattere generale è continua su tutto X. Verifichiamo l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0, 0)$. Si ha, usando che $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t + \cos(|t|) - 1}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(|t|) - 1}{t} = 0$$

Quindi le derivate parziali esistono e sono diverse. Inoltre verifichiamo che f è differenziabile in $(0, 0)$. Si ha infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - 1\,(x - 0) - 0\,(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$.

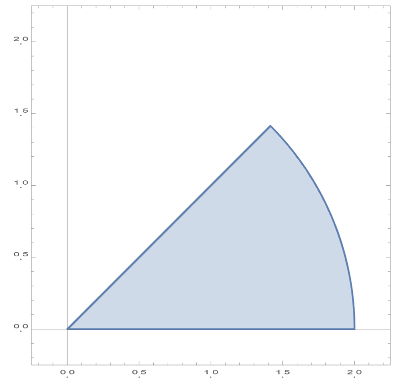

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Per cercare punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

che sono interne a $\bar{\Omega}$. Il sistema ammette come unica soluzione $(1, 0)$ che è sul bordo di $\bar{\Omega}$, quindi non troviamo punti da considerare.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (0\,,\,0)\ , \qquad S_2 = (2\,,\,0) \quad \text{e} \quad S_3 = \left(\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right)$$

poiché dividiamo il bordo in tre parti

$$\Gamma_1 = \{y = 0\,,\, 0 \leq x \leq 2\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{x^2 + y^2 = 4\,,\, \sqrt{2} \leq x \leq 2\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{y = x\,,\, 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [0\,,\,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2 - 2t, \qquad t \in [0\,,\,2]\ .$$

Si trova $g_1'(t) = 2t - 2$, che si annulla in $t_0 = 1 \in (0\,,\,2)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1(1) = (1\,,\,0)\ .$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (\cos t\,,\, \sin t)\,, \qquad t \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{4}\right]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 4 - 2\cos t, \qquad t \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{4}\right]\,.$$

Si trova $g_2'(t) = 2\sin t$, che non si annulla in $\left(0\,,\, \frac{\pi}{4}\right)$.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\, t)\,, \qquad t \in \left[0\,,\, \sqrt{2}\right]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 2t^2 - 2t, \qquad t \in \left[0\,,\, \sqrt{2}\right]\,.$$

Si trova $g_3'(t) = 4t - 2$, che si annulla in $t_0 = \frac{1}{2} \in \left(0\,,\, \sqrt{2}\right)$, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_3(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{2}\right)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = 0\,, \quad f(S_3) = 4 - 2\sqrt{2}\,,$$

$$f(Q_1) = -1\,, \quad f(Q_2) = -\frac{1}{2}\,.$$

Quindi il massimo di f è $4 - 2\sqrt{2}$ e il minimo è -1.

Esercizio 3. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

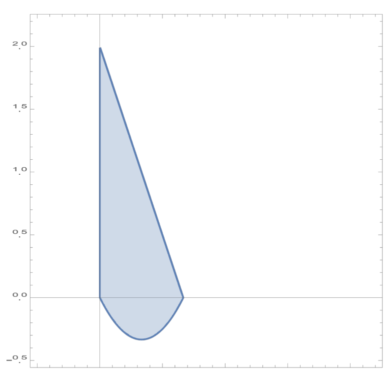

Figure 2: L'insieme Ω.

L'insieme si può scrivere come insieme semplice rispetto alla y stando attenti al fatto che

$$3x^2 - 2x \leq 2 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

e quindi bisogna scrivere Ω come

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \, , \, 3x^2 - 2x \leq y \leq 2 - 3x \right\}$$

Quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1 \, dx \, dy = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_{3x^2-2x}^{2-3x} 1 \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(2 - 3x - 3x^2 + 2x\right) \, dx = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(2 - x - 3x^2\right) \, dx = \frac{22}{27} \, .$$

Esercizio 4. La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0, 2\pi)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (0, 2)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0, 2\pi)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2 \cos t_0 = 0 \\ 2 \sin t_0 = 2 \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = \frac{\pi}{2}$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2 \sin t_0 \\ 2 \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva in P è allora

$$y = 2$$

e quindi il punto che appartiene alla retta è il punto $(1, 2)$.

Esercizio 5. La superficie Σ è una superficie cartesiana, essendo il grafico della funzione $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 1$ con dominio naturale $\mathbb{R}^2$. Infatti si può scrivere come

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, , \, z = f(x,y) \right\}$$