Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 08-01-2021

Esercizio 1 (3 punti). Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$$

quale affermazione è vera?

- la funzione ha un punto di massimo locale;
- la funzione ha due punti di sella;
- la funzione ha un punto di sella in $(1,0)$;
- la funzione ha un punto di minimo locale in $(1,0)$;
- nessuna delle altre.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \le y \le 0\right\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\,,\; y \ge \frac{1}{2}\right\}$$

Esercizio 4 (1 punto). Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^3 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

quale delle seguenti affermazioni è falsa:

- Σ è una superficie cartesiana;
- Σ è una superficie di rotazione;
- il punto $P = (1,0,0)$ appartiene a Σ;
- Σ ammette piano tangente in tutti i punti;
- Σ è un insieme limitato.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x, y)$ è un polinomio e il suo dominio è quindi $\mathbb{R}^2$, su cui è differenziabile almeno due volte. Possiamo quindi applicare la teoria per la caratterizzazione dei punti critici tramite la matrice hessiana. I punti critici sono le soluzioni di

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6(x^2 - y - 1) = 0 \\ 6(-x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

che sono $C_1 = (1, 0)$ e $C_2 = (0, -1)$. Scriviamo quindi la matrice hessiana

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

e la valutiamo nei punti critici. Si trova:

$$Hf(C_1) = Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui $\det(Hf(C_1)) = 36 > 0$ e $\mathrm{tr}(Hf(C_1)) = 18 > 0$. Ne risulta che C_1 è un punto di minimo locale.

$$Hf(C_2) = Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui $\det(Hf(C_1)) = -36 < 0$. Ne risulta che C_2 è un punto di sella.

In conclusione, la funzione non ha punti di massimo locale, ha un solo punto di sella, e $C_1 = (1, 0)$ è.un punto di minimo locale.

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

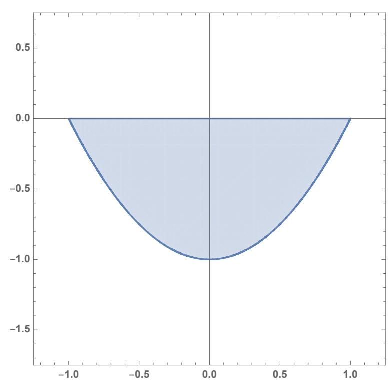

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $\mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Per cercare punti critici liberi interni a Ω cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6(x^2 - y - 1) = 0 \\ 6(-x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

che sono $(1,0)$ e $(0,-1)$. Entrambi i punti non sono interni a Ω e quindi per il momento li trascuriamo (certi di ritrovarli più avanti).

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = (1\,,\,0) \quad \text{e} \quad S_2 = (-1\,,\,0)$$

e dividiamo il bordo in due parti

$$\Gamma_1 = \{y = 0\,,\, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = x^2 - 1\,,\, -1 \leq x \leq 1\right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [-1,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 2t^3 - 6t\,.$$

Si trova $g_1'(t) = 6(t-1)$, che non si annulla in $(-1,1)$.
Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\,t^2 - 1\right), \qquad t \in [-1,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 3t^4 - 4t^3 - 3, \qquad t \in [-1,1]\ .$$

Si trova $g_2'(t) = 12t^2(t-1)$, che nell'intervallo $(-1,1)$ si annulla nel punto 0, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_2\,(0) = (0\,,\,-1)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = -4\,, \quad f(S_2) = 4\,, \quad f(Q_1) = -3\,.$$

Quindi il massimo di f è 4 e il minimo è -4.

Esercizio 3. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

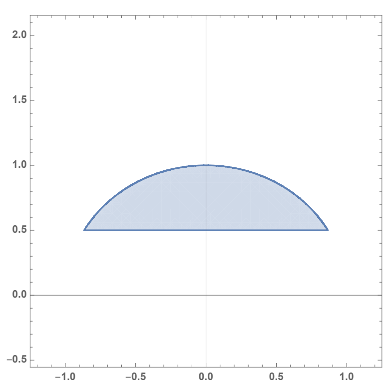

Figure 2: L'insieme Ω.

Vista anche la funzione da integrare, può essere conveniente passare a coordinate polari. Le condizioni che descrivono l'insieme Ω si riscrivono come

$$\rho^2 \leq 1 \quad \text{e} \quad \rho \sin\theta \geq \frac{1}{2}$$

da cui possiamo intanto dedurre che $\sin\theta > 0$ e quindi $\theta \in [0, \pi]$. Riscrivendo le condizioni come

$$\frac{1}{2\sin\theta} \leq \rho \leq 1$$

per scrivere l'insieme S come insieme semplice troviamo le soluzioni di

$$\frac{1}{2\sin\theta} = 1$$

che sono $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$. Dunque

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \,,\, \frac{1}{2\sin\theta} \leq \rho \leq 1\right\}$$

Quindi

$$\iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_S \rho\cos\theta\,\sin\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} \rho\cos\theta\,\sin\theta\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\cos\theta\,\sin\theta - \frac{\cos\theta}{8\sin\theta}\right) d\theta = \left(\frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{1}{8}\log|\sin\theta|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 0\,.$$

Esercizio 4. La superficie Σ si può scrivere come una superficie cartesiana, essendo il grafico della funzione $h(y,z) = (1 - y^2 - z^2)^{\frac{1}{3}}$ che ha come dominio $\mathbb{R}^2$. Infatti possiamo scrivere

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\,,\, x = h(y,z)\right\}$$

La superficie Σ si può scrivere come una superficie di rotazione, generata dal grafico della funzione $g : [-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{1-t^3}$, che ruota intorno all'asse x.

Il punto $P = (1,0,0)$ appartiene a σ visto che verifica l'equazione $x^3 + y^2 + z^2 = 1$.

Inoltre la superficie Σ si può scrivere come insieme di livello della funzione $F(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2$, quindi ammette piano tangente in tutti i punti per cui $\nabla F \neq 0$. Si trova

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

che non si annulla su punti di Σ. Quindi Σ ammette piano tangente i tutti i suoi punti.

L'ultima affermazione, ossia che Σ è un insieme limitato, deve quindi essere falsa. In effetti, come abbiamo visto ad esempio nella rappresentazione di Σ come superficie cartesiana, nella superficie ci sono punti per cui $y^2 + z^2$ tende a infinito, e dunque l'insieme non è limitato.