

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 05-02-2020

Esercizio 1. (12 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(-\mu + 2\mu x - y) \end{cases}$$

su $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ al variare di $\mu \geq 0$.

Esercizio 2. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x^2 + 2y^2 + xy)(x\sqrt{x^2 + y^2} - x - y) - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(x\sqrt{x^2 + y^2} - x + y) \\ \dot{y} = (2x^2 + 2y^2 + xy)(y\sqrt{x^2 + y^2} - y + x) - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(y\sqrt{x^2 + y^2} - y - x) \end{cases}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la funzione

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \left\{ x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) \right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria di un numero reale,

- (i) determinare il numero di punti fissi di f al variare di $a \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ (si usi che per questi valori di a vale $0 < x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) < 2$ per ogni $x \in (0, 1)$);
- (ii) studiare la stabilità dei punti fissi nel caso $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (iii) studiare la stabilità dei punti fissi per $a \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
- (iv) nel caso $a = \frac{1}{2}$, studiare l'esistenza di orbite periodiche di f usando un'opportuna partizione di $[0, 1]$ e il suo f -grafo.

Svolgimento

Esercizio 1. *Disegnare il ritratto di fase del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(-\mu + 2\mu x - y) \end{cases}$$

su $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ al variare di $\mu \geq 0$.

I punti fissi del sistema sono le soluzioni in X di

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(-\mu + 2\mu x - y) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova $x = 0$ oppure $y = 1 - x$. Quindi, sostituendo nella seconda equazione, otteniamo che per $\mu \geq 0$ i punti fissi in X sono

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0) \quad \text{e} \quad P_3 = \left(\frac{\mu + 1}{2\mu + 1}, \frac{\mu}{2\mu + 1} \right)$$

con $P_2 = P_3$ se $\mu = 0$.

La matrice jacobiana del campo di vettori è

$$JF_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ 2\mu y & -\mu + 2\mu x - 2y \end{pmatrix}$$

Inoltre osserviamo che per ogni μ , le rette $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ sono invarianti.

Caso $\mu = 0$. Abbiamo due punti fissi, P_1 e P_2 e

$$JF_{\mu=0}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad JF_{\mu=0}(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi entrambi i punti non sono iperbolici. Non possono esserci orbite periodiche (ad esempio per il criterio dell'indice di Poincaré) e non ci sono altre rette invarianti. Inoltre studiando il segno del campo nel caso $\mu = 0$, si ottiene che il ritratto di fase è necessariamente quello in figura 1.

Caso $\mu > 0$. In questo caso ci sono tre punti fissi, P_1 , P_2 e P_3 . Abbiamo

$$JF_\mu(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad JF_\mu(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Quindi P_1 è un punto di sella, con autovettori lungo gli assi, e P_2 è un punto di sella con varietà stabile data dall'asse x e autovettore relativo all'autovalore positivo μ dato da $v_+ = (-1, 1 + \mu)$.

Per quanto riguarda P_3 abbiamo

$$JF_\mu(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu+1}{2\mu+1} & -\frac{\mu+1}{2\mu+1} \\ \frac{2\mu^2}{2\mu+1} & -\frac{\mu}{2\mu+1} \end{pmatrix}$$

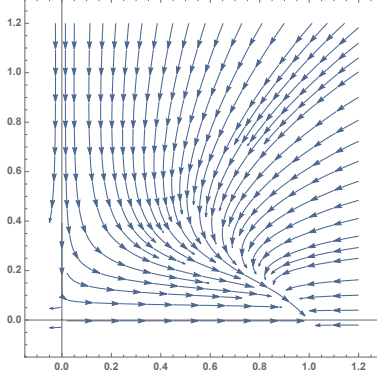


Figure 1: Il ritratto di fase nel caso $\mu = 0$.

da cui $\det(JF_\mu(P_3)) = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu+1} > 0$ per ogni $\mu > 0$, e $\text{tr}(JF_\mu(P_3)) = -1$. Il punto fisso P_3 è quindi un punto iperbolico asintoticamente stabile, che è di tipo nodo o di tipo fuoco. In particolare abbiamo che

$$\text{se } 1 - \frac{4\mu(\mu+1)}{2\mu+1} \geq 0 \quad \text{allora } P_3 \text{ è un nodo (improprio nel caso } = 0)$$

$$\text{se } 1 - \frac{4\mu(\mu+1)}{2\mu+1} < 0 \quad \text{allora } P_3 \text{ è un fuoco}$$

Da cui si ricava che P_3 è un nodo se $\mu \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{4}]$, ed è un fuoco se $\mu > \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Infine per escludere l'esistenza di orbite periodiche intorno a P_3 usiamo il criterio di Dulac. Scegliendo $\rho(x, y) = \frac{1}{xy}$ su $\{x > 0, y > 0\}$ si ha che

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y) x(1-x-y) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y) y(-\mu + 2\mu x - y) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x} < 0$$

quindi non possono esistere orbite periodiche in X .

Il ritratto di fase è allora come in figura 2a per $\mu \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{4})$, come in figura 2b per $\mu = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, e come in figura 2c per $\mu > \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Esercizio 2. Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x^2 + 2y^2 + xy)(x\sqrt{x^2 + y^2} - x - y) - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(x\sqrt{x^2 + y^2} - x + y) \\ \dot{y} = (2x^2 + 2y^2 + xy)(y\sqrt{x^2 + y^2} - y + x) - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(y\sqrt{x^2 + y^2} - y - x) \end{cases}$$

Sembra conveniente studiare questo sistema passando a coordinate polari. Ponendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, otteniamo che

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r^3(r-1)(2 + \sin \theta \cos \theta - r) \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = r^2(2 + \sin \theta \cos \theta + r) \end{cases}$$

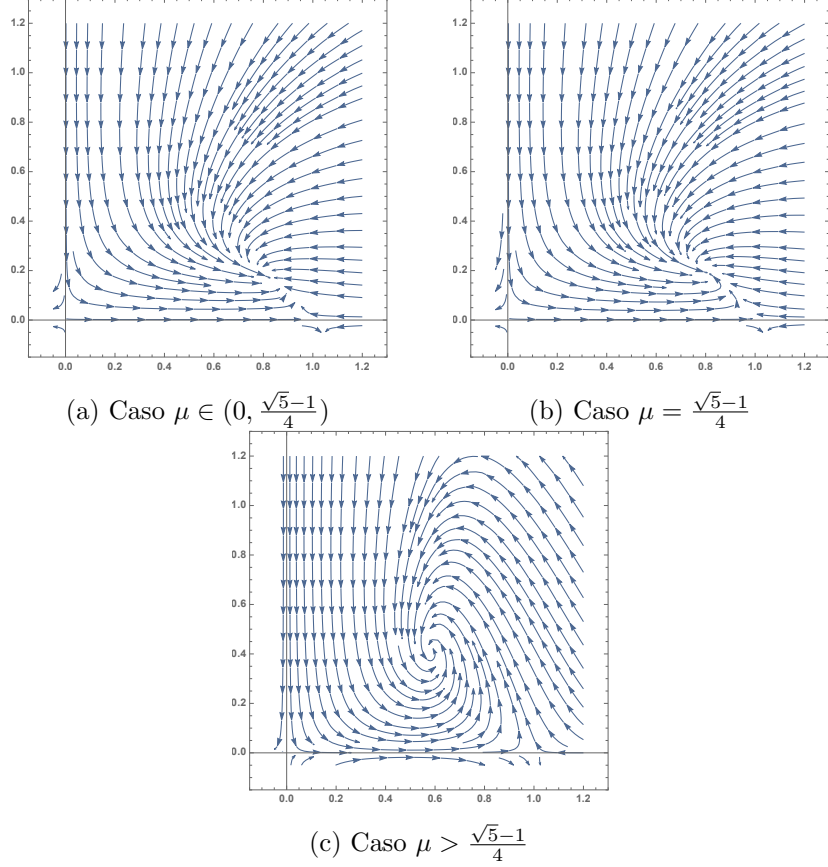


Figure 2

Poiché per $r > 0$ si ha $\dot{\theta} > 0$ per ogni θ , l'unico punto fisso del sistema è l'origine, $P = (0, 0)$ in coordinate cartesiane. Analizzando poi la funzione

$$f(r, \theta) = r^3(r - 1)(2 + \sin \theta \cos \theta - r)$$

si osserva che certamente $f(r, \theta) < 0$ per $r \in (0, 1)$ e per ogni θ . Quindi P è un punto fisso di tipo fuoco asintoticamente stabile.

Inoltre $f(1, \theta) = 0$ implica l'esistenza di un'orbita periodica Γ data dalla circonferenza $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Osservando che

$$\min_{\theta \in [0, 2\pi]} \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

concludiamo anche che $f(r, \theta) > 0$ per $r \in (1, \frac{3}{2} - \varepsilon)$, per ogni $\varepsilon > 0$. In particolare otteniamo che l'orbita periodica Γ è instabile.

Infine, per quanto riguarda la funzione $f(r, \theta)$ possiamo anche concludere che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f(r, \theta) > 0$ per $r \in (1, \frac{3}{2} - \varepsilon)$, come già detto, e anche $f(r, \theta) < 0$ per $r > \frac{5}{2} + \varepsilon$. Quindi l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{5}{2} + \varepsilon \right\}$$

verifica le ipotesi del Teorema di Poincaré-Bendixson: non contiene punti fissi e ogni orbita con condizione iniziale $x_0^2 + y_0^2 > 1$ entra in Ω . Quindi esiste in Ω un'orbita periodica che è ω -limite di tutti i punti (x_0, y_0) che verificano $x_0^2 + y_0^2 > 1$.

Ricordando che $\dot{\theta} > 0$ per ogni (r, θ) con $r > 0$, otteniamo quindi il ritratto di fase in figura 3.

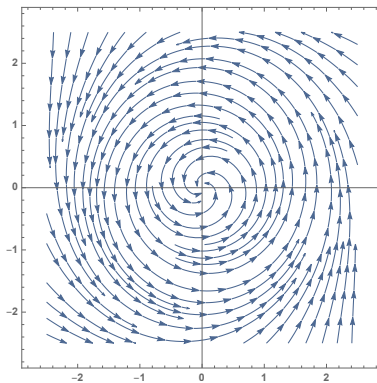


Figure 3: Il ritratto di fase dell'es. 2.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \left\{ x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) \right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria di un numero reale,

(i) determinare il numero di punti fissi di f al variare di $a \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ (si usi che per questi valori di a vale $0 < x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) < 2$ per ogni $x \in (0, 1)$);

Osserviamo innanzitutto che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha: $f(0) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 1$; $f(\frac{1}{2}) = 0$; $f(1) = \frac{1}{2}$. Quindi possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x - \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

In particolare i punti fissi di f sono soluzioni di

$$x + \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) = x \quad \text{per } x \in [0, \frac{1}{2})$$

e di

$$x - \frac{1}{2} - a \sin(2\pi x) = x \quad \text{per } x \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Ricaviamo quindi che i punti fissi esistono se

$$\max_{x \in [0, \frac{1}{2})} a \sin(2\pi x) \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq \frac{1}{2}$$

In particolare

$$\begin{aligned} a \in [0, \frac{1}{2}) &\Rightarrow f \text{ non ammette punti fissi} \\ a = \frac{1}{2} &\Rightarrow f \text{ ha due punti fissi} \\ a \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}] &\Rightarrow f \text{ ha quattro punti fissi} \end{aligned}$$

(ii) studiare la stabilità dei punti fissi nel caso $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

I punti fissi sono le soluzioni di

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(2\pi x) \quad \text{per } x \in [0, \frac{1}{2})$$

e di

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(2\pi x) \quad \text{per } x \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Sono quindi i punti $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ e $x_4 = \frac{5}{6}$. La funzione f è di classe C^1 in un intorno di tutti i punti fissi, il suo grafico per $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è nella figura 4, quindi possiamo studiarne la derivata $f'(x) = 1 - 2\pi a \cos(2\pi x)$. Per $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ troviamo:

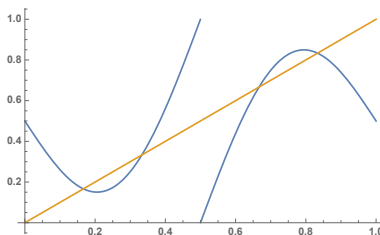


Figure 4: Il grafico di $f(x)$ per $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$f'(x_1) = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \in (-1, 0)$$

quindi x_1 è attrattivo;

$$f'(x_2) = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2\pi}{3} = 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} > 1$$

quindi x_2 è repulsivo;

$$f'(x_3) = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{4\pi}{3} = 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} > 1$$

quindi x_3 è repulsivo;

$$f'(x_4) = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{3} = 1 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \in (-1, 0)$$

quindi x_4 è attrattivo.

(iii) studiare la stabilità dei punti fissi per $a \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}})$;

Abbiamo visto nel punto (i) che f ha punti fissi per $a \geq \frac{1}{2}$.
Caso $a = \frac{1}{2}$. I punti fissi sono $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = \frac{3}{4}$. Si trova

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 1$$

quindi sono punti non iperbolici, ma il grafico di f per $a = \frac{1}{2}$ è nella figura 5, quindi otteniamo che x_1 è attrattivo da sinistra e repulsivo da destra, mentre x_2 è repulsivo da sinistra e attrattivo da destra.

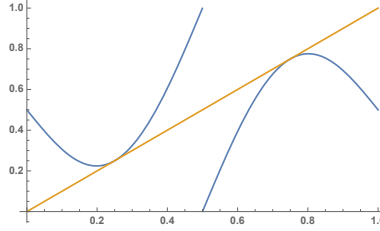


Figure 5: Il grafico di $f(x)$ per $a = \frac{1}{2}$.

Caso $a \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. In questo caso è difficile scrivere esplicitamente il valore dei punti fissi.

Primo ragionamento (un po' informale). Per ragioni di continuità ci aspettiamo che i quattro punti fissi, presi in ordine crescente, abbiano la stessa stabilità di quelli del caso $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Secondo ragionamento (formale). I punti fissi x_1 e x_2 sono le soluzioni in $(0, \frac{1}{2})$ di

$$\frac{1}{2} = a \sin(2\pi x)$$

e verificano $x_1 < \frac{1}{4} < x_2$, quindi, usando che $\cos(2\pi x_1) = \sqrt{1 - \sin^2(2\pi x_1)}$ e $\cos(2\pi x_2) = -\sqrt{1 - \sin^2(2\pi x_2)}$, otteniamo:

$$f'(x_1) = 1 - 2\pi a \cos(2\pi x_1) = 1 - 2\pi a \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}} \in (-1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}} \right)$$

e $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}}$, quindi x_1 è attrattivo;

$$f'(x_2) = 1 - 2\pi a \cos(2\pi x_2) = 1 + 2\pi a \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{2}$$

quindi x_2 è repulsivo.

In maniera analoga si ragiona per x_3 e x_4 .

(iv) nel caso $a = \frac{1}{2}$, studiare l'esistenza di orbite periodiche di f usando un'opportuna partizione di $[0, 1]$ e il suo f -grafo.

Guardando la figura 5 e usando le informazioni che abbiamo sui punti fissi, osserviamo che scegliendo $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$ otteniamo una partizione con un f -grafo semplice, generato dal fatto che: J_1 ricopre una volta J_2 ; ; J_2 ricopre una volta J_2 , J_3 e J_4 ; J_3 ricopre una volta J_1 , J_2 e J_3 ; J_4 ricopre una volta J_3 .

In particolare restringendoci a J_2 e J_3 si ottiene l' f -grafo in figura 6. Otteniamo quindi l'esistenza di orbite periodiche di periodo minimo n per ogni $n \in \mathbb{N}$.



Figure 6: $L'f$ -grafo di J_2 e J_3 .