Istituzioni di Analisi Numerica, Appello 1 del 6/6/2014, Soluzione

Esercizio 1.

a) La funzione $u_k(x) = \cos(k\pi x)$, con $k \geq 0$ intero, è tale che $u_k'(x) = -k\pi \sin(k\pi x)$ e $-u_k''(x) = k^2\pi^2 u_k(x)$ inoltre $u_k'(0) = u_k'(1) = 0$. Per cui $u_k(x)$ è autofunzione corrispondente all'autovalore $\lambda_k = k^2\pi^2$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Seguendo gli argomenti svolti a lezione, si pone $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$, $h = 1/(n+1)$, $u_i = u(x_i)$. Consideriamo l'approssimazione delle condizioni al contorno ottenute con le differenze in avanti e all'indietro. Vale

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + h^2\tau_i = \lambda u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\
&\frac{1}{h}(u_1 - u_0) + h\sigma_0 = 0, \quad \frac{1}{h}(u_{n+1} - u_n) + h\sigma_{n+1} = 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

per valori opportuni dei $\tau_i, \sigma_0, \sigma_{n+1}$.

Da cui $u_0 = u_1 + h^2\sigma_0$ e $u_{n+1} = u_n - h^2\sigma_{n+1}$. Sostituendo nella prima espressione in (1) per $i = 1$ e $i = n$ e semplificando si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}(u_1 - u_2) + h^2\tau_1 - \sigma_0 = \lambda u_1, \\
&\frac{1}{h^2}(u_n - u_{n-1}) + h^2\tau_n + \sigma_{n+1} = \lambda u_n.
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi l'espressione $(B_n + F_n)u^{(n)} = \lambda u^{(n)}$ dove $u^{(n)} = (u_1, \ldots, u_n)^T$, $F_n = F_n' + F_n''$,

$$
B_n = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}
1 & -1 & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & \\
 & -1 & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & -1 & \\
 & & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & & -1 & 1
\end{bmatrix}, \qquad
\begin{aligned}
F_n' &= \tfrac{h^2}{u^{(n)T}u^{(n)}}\tau^{(n)}u^{(n)T}, \\
F_n'' &= \tfrac{1}{u^{(n)T}u^{(n)}}(-\sigma_0 e_1 + \sigma_{n+1}e_n)u^{(n)T}.
\end{aligned}
$$

con $\tau^{(n)} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^T$ e e_1, e_n primo e ultimo vettore della base canonica.

Usando la formula centrata in x_0 e in x_{n+1} si ha

$$
\frac{1}{2h}(u_1 - u_{-1}) + h^2\hat\sigma_0 = 0, \quad \frac{1}{2h}(u_{n+2} - u_n) + h^2\hat\sigma_{n+1} = 0
$$

per opportuni valori dei $\hat\sigma_0, \hat\sigma_{n+1}$, da cui $u_{-1} = u_1 + 2h^3\hat\sigma_0$, $u_{n+2} = u_n - 2h^3\hat\sigma_{n+1}$. Sostituendo nella prima espressione in (1) per $i = 0$ e $i = n+1$ e semplificando si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}(2u_0 - 2u_1) - 2h\hat\sigma_0 + h^2\tau_0 = \lambda u_0 \\
&\frac{1}{h^2}(2u_{n+1} - 2u_n) + 2h\hat\sigma_{n+1} + h^2\tau_{n+1} = \lambda u_{n+1}
\end{aligned}
$$

Si ottiene allora l'espressione $(\widehat{B}_n+\widehat{F}_n)\hat{u}^{(n)} = \lambda\hat{u}^{(n)}$, dove $\hat{u}^{(n)} = (u_0,\dots,u_{n+1})$, $\widehat{F}_n = \widehat{F}'_n + \widehat{F}''_n$,

$$\widehat{B}_n = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \widehat{F}'_n &= \tfrac{h^2}{\hat{u}^{(n)T}\hat{u}^{(n)}}\hat{\tau}^{(n)}\hat{u}^{(n)T}, \\ \widehat{F}''_n &= \tfrac{h}{\hat{u}^{(n)T}\hat{u}^{(n)}}(-\hat{\sigma}_0 e_1 + \hat{\sigma}_{n+1}e_{n+2})\hat{u}^{(n)T} \end{aligned}$$

con $\hat{\tau}^{(n)} = (\tau_0,\dots,\tau_{n+1})^T$.

c) nel primo caso la matrice B_n è simmetrica quindi il teorema di Bauer-Fike ci dà la limitazione $|\lambda-\mu| \le \|F'_n\|_2 + \|F''_n\|_2$. Inoltre, per quanto visto a lezione $\|F_n\|_2 \le h^2\gamma'$, per una opportuna costante γ', mentre

$$\begin{aligned} \|F''_n\|_2 =& \|-\sigma_0 e_1 + \sigma_{n+1}e_n\|_2/\|u^{(n)}\|_2 \\ =& (\|-\sigma_0 e_1 + \sigma_{n+1}e_n\|_2/\sqrt{n+1})/(\|u^{(n)}\|_2/\sqrt{n+1}) \\ \le& \gamma''\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \gamma''\sqrt{h}, \end{aligned}$$

poiché $\|u^{(n)}\|_2/\sqrt{n+1}$ converge a $(\int_0^1 u(x)^2)^{1/2}$ per $n\to\infty$.

Nel secondo caso, la matrice $\widehat{B}$ non è simmetrica ma lo è la matrice $\widetilde{B} = DBD^{-1}$ che è simile a B dove $D = \mathrm{diag}(\sqrt{2},1,\dots,1)$. Applicando il teorema di Bauer-Fike a $\widetilde{B}$ e procedendo come nel caso precedente, dalle limitazioni $\|D\widehat{F}'_n D^{-1}\| \le \hat{\gamma}'h^2$ e $\|D\widehat{F}''_n D^{-1}\| \le \hat{\gamma}''h^{3/2}$ si ottiene la limitazione $|\lambda-\mu| \le \hat{\gamma}h^{3/2}$.

d) Sia $B_n v^{(n)} = \mu v^{(n)}$, moltiplicando la relazione $(B_n+F_n)u^{(n)} = \lambda u^{(n)}$ a sinistra per $v^{(n)T}$, tenendo conto della simmetria di B_n, si ha $\mu v^{(n)T}u^{(n)} + v^{(n)T}F_n u^{(n)} = \lambda v^{(n)T}u^{(n)}$, da cui $\lambda-\mu = v^{(n)T}F_n u^{(n)}/(v^{(n)T}u^{(n)})$.

Poiché per il punto c) e per i risultati visti a lezione la successione $\|v^{(n)} - u^{(n)}\|_2/\|v^{(n)}\|_2$ converge a 0 sotto una opportuna normalizzazione dei due vettori, possiamo scrivere $|\lambda-\mu| \le \theta|u^{(n)T}F_n u^{(n)}/(u^{(n)T}u^{(n)})|$ per una opportuna costante θ.

Nel caso di $F_n = F''_n$ si ha

$$\begin{aligned} |u^{(n)T}F''_n u^{(n)}/(u^{(n)T}u^{(n)})| &= |u^{(n)T}(-\sigma_0 e_1 + \sigma_{n+1}e_n)/(u^{(n)T}u^{(n)})| \\ &= \frac{1}{n+1}(|-u(0)\sigma_0 + u(1)\sigma_{n+1}|/(\|u^{(n)}\|_2^2/(n+1)) \\ &\le \theta' h \end{aligned}$$

per una opportuna costante θ' poiché la successione $\|u^{(n)}\|_2^2/(n+1)$ converge a $\int_a^b u(x)^2 dx$.

In modo analogo si procede per $\widehat{F}_n$.

Esercizio 2.

a) I polinomi $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), x^2 p_{n-2}(x)$ sono linearmente indipendenti avendo grado $0, 1, 2, \ldots, n$. Quindi costituiscono una base per $\mathcal{P}_n$ e si può scrivere:

$$p_n(x) = a_n x^2 p_{n-2}(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x) + a_{n-2} p_{n-2}(x) + \cdots + a_0 p_0(x).$$

Moltiplicando scalarmente per $p_k(x)$ per $k < n$ si ha

$$0 = \langle p_k, p_n \rangle = a_n \langle p_k, x^2 p_{n-2} \rangle + a_k \langle p_k, p_k \rangle.$$

Poichè $\langle p_k, x^2 p_{n-2} \rangle = \langle x^2 p_k, p_{n-2} \rangle$ e $\langle x^2 p_k, p_{n-2} \rangle = 0$ se $k + 2 < n - 2$ essendo il grado di $x^2 p_k$ minore di $n - 2$, ne segue che $a_k = 0$ per $k < n - 4$ quindi

$$p_n(x) = a_{n-1} p_{n-1}(x) + (a_n x^2 + a_{n-2}) p_{n-2}(x) + a_{n-3} p_{n-3}(x) + a_{n-4} p_{n-4}(x).$$

In particolare si ottiene

$$a_{n-i} = -a_n \frac{\langle x^2 p_{n-2}, p_{n-i} \rangle}{\langle p_{n-i}, p_{n-i} \rangle}, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

b) No, la struttura di Hankel non è mantenuta. Infatti se la proprietà $\langle x^{i+1}, x^j \rangle = \langle x^i, x^{j+1} \rangle$ fosse verificata per ogni $i, j = 0, \ldots, n-1$, allora per bilinearità varrebbe $\langle \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1}, \sum_{j=0}^n b_j x^j \rangle = \langle \sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{j=0}^n b_j x^{j+1} \rangle$ e quindi varrebbe per ogni $f(x), g(x) \in \mathcal{P}_n$. Deve quindi esistere (i, j) tale che $\langle x^{i+1}, x^j \rangle \neq \langle x^i, x^{j+1} \rangle$ quindi $h_{i+1,j} \neq h_{i,j+1}$ e la matrice perde la struttura di Hankel.

La condizione $\langle x^2 x^i, x^j \rangle = \langle x^i, x^2 x^j \rangle$ implica che $h_{i+2,j} = h_{i,j+2}$. Questa è l'unica struttura che si conserva oltra alla simmetria. In particolare, le sottomatrici $H_{1,1} = (h_{2i-1,2j-1})$, $H_{2,2} = (h_{2i,2j})$, $H_{1,2} = (h_{2i-1,2j})$, $H_{2,1} = (h_{2i,2j-1})$ sono di Hankel. Quindi, permutando righe e colonne di H con una permutazione dispari/pari oppure pari/dispari si ottiene una matrice formata da quattro blocchi di Hankel del tipo

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix}.$$

Poichè se $\mathbf{f}$ sono i vettori dei coefficienti dei polinomi $f(x)$ e $g(x)$ vale $\langle f(x), g(x) \rangle = \mathbf{f}^T H \mathbf{g}$, basta considerare una matrice H con la struttura descritta sopra che sia definita positiva e definire il prodotto scalare come sopra.

Una matrice H definita positiva con le proprietà descritte si può costruire considerando una qualsiasi matrice derivante da un prodotto scalare di tipo integrale, ad esempio la matrice di Hilbert, e per un k fissato perturbando gli elementi $h_{k-2i,k+2i}$ per tutti i valori di i consentiti. Se la perturbazione è sufficientemente piccola in valore assoluto, si ottiene ancora una matrice definita positiva per la continuità del determinante.

Alternativamente, per n pari si può definire $H_{1,1} = H_{2,2}$ uguali alla matrice di Hilbert, $H_{1,2} = H_{2,1}^T = 0$. In questo caso vale la proprietà $\langle x^2 p(x), q(x) \rangle = \langle p(x), x^2 q(x) \rangle$, inoltre $\langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 x dx$ mentre $\langle x, x \rangle = \int_0^1 1 dx$ quindi $\langle 1, x^2 \rangle \neq \langle x, x \rangle$.

c) Calcolando il determinante di $H_n(x)$ con la regola di Laplace sull'ultima riga di $H_n(x)$ si ha $\det H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i(-1)^{n-i}d_i$, dove d_i sono i determinanti delle sottomatrici ottenute cancellando l'ultima riga e la colonna $i+1$-esima, per $i = 0, \ldots, n$. Per cui $\langle x^k, \det H_n(x)\rangle = \sum_{i=0}^{n}\langle x^k, x^i\rangle \det H_n(x) = \det \widetilde{H}(x)$ dove $\widetilde{H}(x)$ è la matrice ottenuta da $H(x)$ sostituendo l'ultima riga con $[\langle x^k, x^0\rangle, \ldots, \langle x^k, x^n\rangle]$. Ma questo è nullo per $k = 1, \ldots, n-1$ poiché l'ultima riga coinciderebbe con la k-esima. Per cui risulta $\langle x^k, \det H_n(x)\rangle$ per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e quindi $\det H_n(x) = p_n(x)$.

d) $\langle \cdot, \cdot, \rangle'$ è prodotto scalare poiché è forma bilineare ed è definito positivo essendo $\langle p, p\rangle' = \langle p_+(x), p_+(x)\rangle + \langle p_-(x), p_-(x)\rangle \geq 0$ come somma di quantità non negative, ed è nullo solo se i due addendi sono nulli, cioè solo se $p(x) \equiv 0$.

Vale

$$\begin{aligned}\langle x^2p(x), q(x)\rangle' =&\langle x^2p_+(x^2) + x(x^2p_-(x^2)), q_+(x^2) + xq_-(x^2)\rangle' \\ =&\langle xp_+(x), q_+(x)\rangle + \langle xp_-(x), q_-(x)\rangle \\ =&\langle p_+(x), xq_+(x)\rangle + \langle p_-(x), xq_-(x)\rangle \\ =&\langle p(x), x^2q(x)\rangle'\end{aligned}$$

Posto $p(x) = 1$ e $q(x) = x$ vale $\langle xp(x), q(x)\rangle' = \langle x, x\rangle' = \langle 1, 1\rangle$, mentre $\langle p(x), xq(x)\rangle' = \langle 1, x^2\rangle' = \langle 1, x\rangle$ I due prodotti scalari sono diversi se $\langle 1, 1\rangle \neq \langle 1, x\rangle$, ciò accade ad esempio con $[a, b] = [0, 1]$ e $w(x) = 1$.

e) Sì basta considerare la matrice A di Hessenberg inferiore pentadiagonale con elementi sopradiagonali uguali a -1, diagonali uguali a c_i, sottodiagonali uguali a $a_ix^2 + b_i$ e nelle due sottodiagonali successive uguali rispettivamente a d_i ed e_i. Posto $v = [p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)]^T$, vale $Av = p_n(x)e_n$. In particolare gli zeri di $p_n(x)$ sono gli zeri di $\det A$.