Traccia della prima parte del corso di IAN, a.a. 2014-2015

Dario A. Bini

2 marzo 2015

1 Introduzione

Questo documento contiene una traccia più o meno dettagliata di parte degli argomenti trattati nel corso di Istituzioni di Analisi Numerica (IAN). La traccia degli altri argomenti trattati si trova in un secondo documento sulla risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali e dagli appunti forniti dall prof.ssa Ornella Menchi durante lo svolgimento del corso di IAN.

Scopo dell'Analisi Numerica è il progetto e l'analisi di metodi di risoluzione di vari problemi matematici mediante l'uso di sole operazioni aritmetiche fra numeri *floating point*. Nel corso dell'insegnamento di Analisi Numerica ci siamo occupati principalmente di problemi dell'algebra lineare e del discreto quali sistemi lineari, trasformate discrete, interpolazione. Nel corso di Calcolo Scientifico l'interesse si è rivolto verso problemi spettrali (autovalori, SVD) e metodi per sistemi lineari di grandi dimensioni provenenti dalle applicazioni. Nel corso di IAN ci occupiamo principalmente di problemi del "continuo". problemi cioè in cui l'oggetto da "calcolare" è una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ e non un vettore. La motivazione e lo scopo saranno comunque gli stessi: progettare e analizzare metodi di risoluzione che impieghino un numero finito di operazioni aritmetiche. Naturalmente la finitezza del numero di operazioni comporterà l'impossibilità di calcolare esattamente la soluzione per cui sarà necessario approssimarla.

I problemi che andiamo a trattare sono:

- approssimazione di funzioni: data $f(x) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinare una $g(x)$ in una classe di funzioni facilmente calcolabili che meglio approssimi $g(x)$;
- integrazione approssimata: data $f(x) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approssimare $\int_a^b f(x)dx$;
- approssimare la soluzione di certe equazioni differenziali alle derivate parziali che si incontrano nelle applicazioni

I metodi numerici diventano necessità in tutte le situazioni in cui la soluzione (funzione) di cui cerchiamo informazioni non si lascia esprimere in modo esplicito in termini di funzioni elementari. Questa situazione si presenta nella quasi totalità dei casi di interesse.

Il corso è suddiviso in

- parte sui polinomi ortogonali: contiene la definizione e l'analisi delle proprietà di questa classe di polinomi con la tassonomia delle principali tipologie di polinomi; saranno evidenziate analogie tra polinomi ortogonali e matrici tridiagonali con proprietà dell'algebra lineare numerica;
- parte sull'applicazione dei polinomi ortogonali alla costruzione di efficienti formule di integrazione approssimata;
- parte che riguarda i metodi per l'approssimazione di funzioni in generale; particolare attenzione è rivolta alla migliore approssimazione in norma 2 e in norma infinito; saranno utilizzate le proprietà dei polinomi ortogonali; saranno sottolineate le relazioni tra approssimazione e interpolazione con particolare attenzione ai problemi del condizionamento; verrà considerato un risultato generale noto come teorema di Korovkin; verranno introdotte e analizzate le funzioni curvilinee
- parte sulla risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali: sarà fatta la classificazione in equazioni ellittiche, paraboliche e iperboliche con esempi dalle applicazioni; verrà sviluppata la parte relativa al metodo delle differenze finite dove viene data una impostazione il più possibile "matriciale"; è fatto un cenno ai metodi di Rayleigh-Ritz-Galerkin e di collocazione.

2 Polinomi ortogonali

Nel seguito si denota con $\mathcal{P}_n$ lo spazio vettoriale di dimensione $n+1$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più n e con $\mathcal{P}$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali. Inoltre a, b denotano due costanti della retta reale estesa $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ con $a < b$. In questo modo l'intervallo $[a, b]$ può essere anche del tipo $[-\infty, \beta]$, $[\alpha, +\infty]$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $[-\infty, +\infty]$.

Sia $\omega(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a valori nella retta reale estesa tale che $\omega(x) > 0$ per $a < x < b$ ed esista finito $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$ per ogni polinomio $f(x) \in \mathcal{P}(x)$. Si osserva che l'applicazione che a una coppia di polinomi $(f(x), g(x))$, $f(x), g(x) \in \mathcal{P}$ associa il numero reale

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx \qquad (1)$$

è un prodotto scalare sul $\mathcal{P}$. L'applicazione che a $f(x) \in \mathcal{P}$ associa $(\int_a^b f(x)\omega(x)dx)^{1/2}$ è una norma su $\mathcal{P}$ che viene denotata con $\|f(x)\|$.

Osservazione 1 Il prodotto scalare appena introdotto verifica la proprietà $\langle xf(x), g(x)\rangle = \langle f(x), xg(x)\rangle$. Non tutti i prodotti scalari su $\mathcal{P}$ verificano questa proprietà. Ad esempio, se consideriamo $\mathcal{P}_n$, e associamo a $p(x) \in \mathcal{P}_n$ la $(n+1)$-upla dei suoi coefficienti, possiamo rappresentare lo spazio lineare $\mathcal{P}_n$ con $\mathbb{R}^{n+1}$. Per cui ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^{n+1}$ induce un prodotto scalare su $\mathcal{P}_n$. In particolare il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^{n+1}$ induce il prodotto scalare tra polinomi $\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{i=0}^{n} p_i q_i$ dove $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$, che non soddisfa la proprietà $\langle xf(x), g(x)\rangle = \langle f(x), xg(x)\rangle$. $\square$

Definizione 2 *Dato un prodotto scalare* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *su* $\mathcal{P}$, *un insieme di polinomi* $\{p_i(x) \in \mathcal{P}_i,\ i = 0, 1 \ldots\}$ *tale che* $\deg(p_i) = i$ *e* $\langle p_i, p_j\rangle = 0$ *se* $i \neq j$ *è detto* insieme di polinomi ortogonali *relativamente al prodotto scalare* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\square$

I polinomi $p_i(x)/h_i^{1/2}$, $h_i = \langle p_i, p_i\rangle$ sono detti polinomi ortonormali. Ad esempio, i polinomi x^i, $i = 0, 1, \ldots$, sono ortonormali rispetto al prodotto scalare indotto dal prodotto euclideo.

Esempi classici di funzioni peso che definiscono il prodotto scalare di tipo integrale sono $\omega(x) = 1$ su $[-1, 1]$, $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ su $[-1, 1]$, $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ su $[-1, 1]$, $\omega(x) = e^{-x}$ su $[0, +\infty]$, e^{-x^2} su $[-\infty, +\infty]$.

Osservazione 3 Per un generico prodotto scalare su $\mathcal{P}$, esistono sempre polinomi ortogonali che possono essere costruiti mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a partire dai monomi $1, x, x^2, x^3, \ldots$, nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll} p_0(x) = 1, \quad p_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k,i} p_i(x), & \\ & k = 1, 2, \ldots \\ \alpha_{k,i} = -\left\langle x^k, p_i(x)\right\rangle / \langle p_i(x), p_i(x)\rangle, \quad i = 0, \ldots, k-1 & \end{array} \tag{2}$$

Col prodotto scalare integrale (1) per calcolare i coefficienti $\alpha_{k,i}$ per $i = 0, \ldots, k-1$ e $k = 1, \ldots, n$, occorre calcolare, o approssimare numericamente, $n(n+1)/2$ integrali. Inoltre, per calcolare i coefficienti del generico polinomio p_k di grado k occorre eseguire circa k^2 operazioni aritmetiche per cui il costo totale per calcolare i coefficienti di tutti i polinomi p_k, $k = 0, \ldots, n$ è di $O(n^3)$ operazioni. Questo però non è il modo migliore di procedere. Come vedremo tra poco ci sono espressioni più semplici per esprimere i coefficienti di $p_k(x)$.

Inoltre per calcolare il valore che $p_k(x)$ assume in un punto ξ usando la (2) occorrono circa $2k$ operazioni aritmetiche avendo però prima calcolato i valori di $p_i(\xi)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ e i coefficienti $a_{k,i}$. Quindi occorrono $O(k^2)$ operazioni. Anche questo calcolo può essere semplificato mediante una diversa rappresentazione dei polinomi ortogonali. $\square$

La seguente banale osservazione ha una serie di conseguenze meno immediate e di particolare rilevanza.

Osservazione 4 I polinomi ortogonali $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base dello spazio vettoriale $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado minore o uguale ad n. $\square$

Dalla precedente osservazione segue il

Teorema 5 *Se $p_0, p_1, \ldots,$ sono polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare* (1) *allora per ogni polinomio q di grado n vale $\langle p_i, q\rangle = 0$ per ogni $i > n$.*

Dim. Per l'osservazione 4 si ha $q(x) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j p_j(x)$, $\gamma_n \neq 0$. Se $i > n$ vale allora $\langle p_i, q\rangle = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \langle p_i, p_j\rangle = 0$. $\square$

La proprietà espressa nel teorema precedente ci permette di dimostrare il seguente risultato interessante.

Teorema 6 *Gli zeri dei polinomi ortogonali rispetto al prodotto sclare* (1) *sono reali e semplici e stanno in (a, b).*

Dim. Siano $x_1, \ldots, x_j$ gli zeri reali e distinti di $p_n(x)$ in (a, b). Per assurdo supponiamo $j < n$. Supponiamo inoltre che k di questi zeri abbiano molteplicità dispari e $j - k$ pari. Numeriamo gli x_i in modo che i primi k abbiano molteplicità dispari. Definiamo

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \prod_{s=1}^{k}(x - x_s) & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Allora gli zeri in (a, b) di $p_n(x)q(x)$ hanno molteplicità pari e quindi questo prodotto non cambia segno in (a, b). Conseguentemente

$$\langle p_n, q\rangle = \int_a^b p_n(x)q(x)\omega(x)dx \neq 0$$

che è assurdo per il teorema 5 poiché il grado di $q(x)$ è $k \leq j < n$ $\square$

Vale il seguente risultato di minima norma

Teorema 7 *Tra tutti i polinomi $p(x)$ di grado n che hanno coefficiente del termine di grado massimo uguale a quello di $p_n(x)$, il polinomio $p_n(x)$ è quello di minima norma.*

Dim. Ogni polinomio q di grado n che ha lo stesso coefficiente di grado massimo di $p_n(x)$ si lascia scrivere come $q = p_n(x) + q_{n-1}(x)$, dove $q_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado al più $n - 1$. Vale quindi

$$\|q\|^2 = \langle q, q\rangle = \langle p_n, p_n\rangle + \langle q_{n-1}, q_{n-1}\rangle$$

essendo $\langle q_{n-1}, p_n \rangle = 0$ per l'ortogonalità. Risulta allora $\|q\|^2 \geq \|p_n\|^2$ dove l'uguaglianza è raggiunta se e solo se $q_{n-1} = 0$ cioè $q = p$. $\square$

Un'altra conseguenza del teorema 5 è data dal seguente risultato che ha rilevanza sia teorica che computazionale.

Teorema 8 (Ricorrenza a tre termini) *Siano $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$, un insieme di polinomi ortogonali su $[a, b]$ rispetto a un prodotto scalare* (1). *Si denoti $p_0(x) = a_0$, $p_1(x) = a_1 x + b_1$. Esistono $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$ tali che*

$$p_{i+1}(x) = (xA_{i+1} + B_{i+1})p_i(x) - C_i p_{i-1}(x), \quad i \geq 1, \quad A_{i+1}, C_i \neq 0.$$

Inoltre

$$A_{i+1} = \frac{\langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle}{\langle xp_i, p_{i+1} \rangle}, \quad B_{i+1} = -A_{i+1} \frac{\langle xp_i, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle},$$
$$C_i = A_{i+1} \frac{\langle xp_i, p_{i-1} \rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle} = \frac{A_{i+1}}{A_i} \frac{\langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle}.$$

Denotando con a_i e b_i rispettivamente i coefficienti di x^i e x^{i-1} in $p_i(x)$, vale $A_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{a_i}$, $B_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{a_i}(\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} - \frac{b_i}{a_i})$, $C_i = \frac{a_{i+1} a_{i-1}}{a_i^2} \frac{h_i}{h_{i-1}}$, dove $h_i = \langle p_i, p_i \rangle$.

Dim. Il polinomio $xp_i(x)$ ha grado $i + 1$ per cui $xp_i, p_i, \ldots, p_0$ sono linearmente indipendenti. Esistono allora $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1} \in \mathbb{R}$ tali che

$$p_{i+1} = \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_i p_i + \alpha_{i+1} xp_i.$$

Per $j \neq i + 1$ vale

$$0 = \langle p_j, p_{i+1} \rangle = \alpha_j \langle p_j, p_j \rangle + \alpha_{i+1} \langle p_j, xp_i \rangle = \alpha_j \langle p_j, p_j \rangle + \alpha_{i+1} \langle xp_j, p_i \rangle.$$

Poiché se $j \leq i - 2$ il polinomio xp_j ha grado minore di i, per il teorema 5 è $\langle xp_j, p_i \rangle = 0$. Quindi $\alpha_j = 0$ per $j = 0, \ldots, i - 2$ per cui

$$p_{i+1} = \alpha_{i+1} xp_i + \alpha_i p_i + \alpha_{i-1} p_{i-1}. \tag{3}$$

Vale quindi il risultato del teorema con $A_{i+1} = \alpha_{i+1}$, $B_{i+1} = \alpha_i$ $C_i = -\alpha_{i-1}$. Le costanti A_i, B_i, C_i possono essere facilmente espresse in termini di prodotti scalari. Infatti moltiplicando scalarmente per p_{i+1}, p_i e p_{i-1} entrambi i membri della (3) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle = A_{i+1} \langle xp_i, p_{i+1} \rangle, \\
&A_{i+1} \langle xp_i, p_i \rangle + B_{i+1} \langle p_i, p_i \rangle = 0 \\
&A_{i+1} \langle p_{i-1}, xp_i \rangle - C_i \langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle = 0
\end{aligned}$$

da cui $\langle xp_i(x), p_{i+1}(x) \rangle \neq 0$ e si ricavano le espressioni per A_{i+1}, B_{i+1}, C_i. Le altre relazioni seguono da un confronto diretto dei polinomi. Inoltre, poiché $\langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle \neq 0$ ne segue che $A_{i+1} \neq 0$, inoltre dall'espressione $C_i = \frac{A_{i+1}}{A_i} \frac{\langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_{i-1}, , p_{i-1} \rangle}$ segue $C_i \neq 0$. $\square$

Osservazione 9 Poiché i polinomi del teorema 8 sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, possiamo scegliere i polinomi monici in modo che $a_i = 1$ per ogni $i \geq 1$ per cui $A_i = 1$ per $i \geq 1$. In questo modo risulta

$$A_{i+1} = 1, \quad B_{i+1} = -\frac{\langle xp_i, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}, \quad C_i = \frac{\langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle} > 0.$$

□

Osservazione 10 Si noti che la relazione a tre termini data nel teorema 8 ci dice che $p_{i-1}(x)$ è il resto della divisione di $p_{i+1}(x)$ per $p_i(x)$. Per cui i polinomi ortogonali $p_{n+1}(x), p_n(x), \ldots, p_0(x)$ possono essere visti come i polinomi generati dall'algoritmo Euclideo applicato a $p_{n+1}(x)$ e $p_n(x)$. □

Osservazione 11 Fissato i, i coefficienti $A_{i+1} = 1$, B_{i+1}, C_i richiedono il calcolo dei prodotti scalari $\langle p_i, p_i \rangle$, $\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle$, $\langle xp_i, p_i \rangle$. Per cui il loro calcolo per $i = 1, \ldots, k$ comporta solamente $2k$ prodotti scalari.

Per calcolare il valore di $p_k(\xi)$ usando la relazione a tre termini, supponendo di avere a disposizione i coefficienti $A_{i+1} = 1$, B_{i+1} e C_i e di aver caclolato i valori $p_i(\xi)$ per $i = 0, \ldots, k-1$, bastano 4 operazioni aritmetiche. Quindi per calcolare tutti i valori $p_i(\xi)$ per $i = 1, \ldots, k$ bastano $4k$ operazioni aritmetiche.

In modo analogo si vede che i coefficienti di tutti i polinomi ortogonali di grado al più k sono calcolabili in $O(k^2)$ operazioni.

Un confronto col metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt mostra che l'uso della relazione ricorrente a tre termini abbassa sostanzialmente i costi computazionali delle operazioni con polinomi ortogonali. □

Teorema 12 (Formula di Christoffel-Darboux) *Vale*

$$(x - y) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{h_i} p_i(x) p_i(y) = \gamma_n \left[p_{n+1}(x) p_n(y) - p_{n+1}(y) p_n(x) \right] \tag{4}$$

dove $\gamma_n = \frac{a_n}{a_{n+1} h_n} = \frac{1}{h_n A_{n+1}}$, $h_i = \langle p_i, p_i \rangle$.

Dim. Procediamo per induzione. Se $n = 0$ allora devo dimostrare che $(x - y) \frac{1}{h_0} p_0(x) p_0(y) = \frac{a_0}{a_1 h_0} \left[p_1(x) p_0(y) - p_1(y) p_0(x) \right]$. Poiché $p_0(x) = a_0$, e $p_1(x) = a_1 x + b_1$, allora il secondo membro della relazione precedente diventa

$$\frac{a_0}{a_1 h_0} \left[(a_1 x + b_1) a_0 - (a_1 y + b_1) a_0 \right] = \frac{a_0}{a_1 h_0} a_1 (x - y) a_0,$$

che coincide con $\frac{a_0^2}{h_0}(x - y)$.

Per l'implicazione $n - 1 \to n$, consideriamo il secondo membro di (4) dove sostituiamo al posto di $p_{n+1}(x)$ e di $p_{n+1}(y)$ l'espressione ottenuta con la relazione a tre termini. Si ottiene quindi

$$\gamma_n \left[((xA_{n+1} + B_{n+1})\, p_n(x) - C_n p_{n-1}(x))p_n(y) \right. \\ \left. - ((yA_{n+1} + B_{n+1})p_n(y) - C_n p_{n-1}(y))p_n(x) \right].$$

Semplificando si arriva a

$$(x-y)\gamma_n A_{n+1} p_n(x)p_n(y) + \gamma_n C_n (p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x))$$

Per l'ipotesi induttiva il secondo addendo coincide con

$$\frac{C_n\gamma_n}{\gamma_{n-1}}(x-y)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{h_i}p_i(x)p_i(y).$$

La tesi segue dal fatto che $\frac{\gamma_n C_n}{\gamma_{n-1}} = 1$ e $\gamma_n A_{n+1} = 1/h_n$, per la definizione di γ_n e per le relazioni date nel teorema 8. □

Osservazione 13 Una dimostrazione alternativa della formula di Christoffel-Darboux è la seguente. Vale

$$\begin{array}{ll} p_{i+1}(x) = (A_{i+1}x + B_{i+1})p_i(x) - C_i p_{i-1}(x) & \text{moltiplico per } p_i(y) \\ p_{i+1}(x)p_i(y) = (A_{i+1}x + B_{i+1})p_i(x)p_i(y) - C_i p_{i-1}(x)p_i(y) & \text{scambio variabili} \\ p_{i+1}(y)p_i(x) = (A_{i+1}y + B_{i+1})p_i(y)p_i(x) - C_i p_{i-1}(y)p_i(x) & \text{sottraggo} \\ p_{i+1}(x)p_i(y) - p_{i+1}(y)p_i(x) & \\ \qquad = p_i(x)p_i(y)[x-y]A_{i+1} - C_i[p_{i-1}(x)p_i(y) - p_{i-1}(y)p_i(x)] & \end{array}$$

Quindi

$$\begin{aligned} [x-y]p_i(x)p_i(y)A_{i+1} &= p_{i+1}(x)p_i(y) - p_{i+1}(y)p_i(x) \\ &\quad + C_i[p_{i-1}(x)p_i(y) - p_{i-1}(y)p_i(x)] \\ \frac{1}{h_i}[x-y]p_i(x)p_i(y) &= \frac{1}{h_i A_{i+1}}[p_{i+1}(x)p_i(y) - p_{i+1}(y)p_i(x)] \\ &\quad + \frac{C_i}{h_i A_{i+1}}[p_{i-1}(x)p_i(y) - p_{i-1}(y)p_i(x)] \end{aligned}$$

dove $C_i = (h_i/h_{i-1})(A_{i+1}/A_i)$. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_i}[x-y]p_i(x)p_i(y) &= \frac{1}{h_i A_{i+1}}[p_{i+1}(x)p_i(y) - p_{i+1}(y)p_i(x)] \\ &\quad + \frac{1}{h_{i-1} A_i}[p_{i-1}(x)p_i(y) - p_{i-1}(y)p_i(x)] \end{aligned}$$

Sommando, i termini si elidono a due a due e si ottiene la tesi. □

Osservazione 14 Applicando la formula di Christoffel Darboux per $x = x_i$ e $y = x_j$, dove $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sono gli zeri di $p_{n+1}(x)$, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{h_k} p_k(x_i) p_k(x_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Inoltre $\sum_{k=0}^{n+1} p_k(x_i)^2/h_k \neq 0$ essendo $p_0(x_i)^2/h_0 = a_0^2/h_0 > 0$. La matrice $V = (v_{i,j})_{i,j=1,n+1}$, $v_{i,j} = p_{i-1}(x_j)/\sqrt{h_{i-1}}$ è tale che $V^T V$ è una matrice diagonale. Cioè V ha le colonne $v_{\cdot j}$ ortogonali. Possiamo scalare le colonne in modo da farle diventare ortonormali, basta per questo dividerle per la loro norma euclidea. Posto

$$\sigma_j = 1/\|v_{\cdot j}\|^2, \quad \|v_{\cdot j}\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i(x_j)^2}{h_i},$$

la matrice $W = V\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ ha colonne ortonormali e verifica la proprietà $W^T W = I$ per cui è ortogonale e quindi $WW^T = I$. Quest'ultima relazione si scrive come $\sum_{k=1}^{n+1} w_{i,k} w_{j,k} = \delta_{i,j}$, da cui

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_i(x_k)}{\sqrt{h_i}} \frac{p_j(x_k)}{\sqrt{h_j}} \sigma_k = \delta_{i,j}, \quad \sigma_k = 1/\sum_{s=0}^{n} \frac{p_s(x_k)^2}{h_s}. \tag{5}$$

Questa espressione fornisce una sorta di *ortogonalità "discreta"* dei polinomi $p_i(x)$ relativa ai punti x_k e ai pesi σ_k. In particolare, se associamo ai polinomi $p_j(x)$ i vettori $\boldsymbol{u}^{(j)} = (u_i^{(j)})$ per $j = 0, \ldots, n$, ottenuti campionando i polinomi ortonormali negli zeri di $p_{n+1}(x)$, cioè tali che $u_i^{(j)} = p_j(x_i)/\sqrt{h_j}$, abbiamo che $\boldsymbol{u}^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(n)}$ sono ortonormali rispetto al prodotto scalare (discreto pesato)

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} y_i z_i \sigma_i.$$

$\square$

Osservazione 15 (Formule di integrazione Gaussiana) Se su uno spazio vettoriale $\mathcal{V}_{n+1}$ di dimensione $n+1$ sono assegnati due prodotti scalari $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle''$ che coincidono su una base $v_1, \ldots, v_{n+1}$ di $\mathcal{V}_{n+1}$, cioè $\langle v_i, v_j \rangle' = \langle v_i, v_j \rangle''$, allora tali prodotti scalari coincidono dappertutto, cioè $\langle u, v \rangle' = \langle u, v \rangle''$ per ogni $u, v \in \mathcal{V}_{n+1}$. Questo può essere facilmente dimostrato rappresentando u e v nella base $v_1, \ldots, v_{n+1}$ e applicando la bilinearità del prodotto scalare.

Se consideriamo allora come $\mathcal{V}_{n+1}$ lo spazio dei polinomi di grado al più n abbiamo che i due prodotti scalari $\langle u, v \rangle' = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx$ e $\langle u(x), v(x) \rangle'' = \sum_{k=1}^{n+1} u(x_k)v(x_k)\sigma_k$, dove x_k per $k = 1, \ldots, n+1$ denotano gli zeri del polinomio ortogonale p_{n+1} di grado $n+1$, coincidono sulla base dei polinomi ortogonali.

Quindi coincidono dappertutto. In particolare, se $u(x)$ e $v(x)$ sono polinomi di grado al più n si ha

$$\int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n+1} u(x_k)v(x_k)\sigma_k. \tag{6}$$

Questa proprietà permette di dimostrare che per ogni polinomio $g(x)$ di grado al più $2n+1$ vale

$$\int_a^b g(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{n+1} g(x_k)\sigma_k.$$

Cioè la formula di integrazione discreta

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)\sigma_k$$

per approssimare l'integrale di una funzione $f(x)$, detta formula di integrazione Gaussiana, è esatta per ogni polinomio di grado al più $2n+1$, o come si suole dire, ha grado di precisione $2n+1$. Per dimostrare questo basta scrivere $g(x)$ come

$$g(x) = p_{n+1}(x)q(x) + r(x)$$

dove $q(x)$ è il quoziente e $r(x)$ il resto della divisione di $g(x)$ per $p_{n+1}(x)$. In questo modo il grado di $q(x)$ e il grado di $r(x)$ sono al più n e inoltre vale $g(x_j) = r(x_j)$, $j = 1, \ldots, n+1$ essendo $p_{n+1}(x_j) = 0$, per $j = 1, \ldots, n+1$. Si osserva allora che moltiplicando entrambi i membri della relazione precedente per $\omega(x)$ e integrando su $[a, b]$ si ha

$$\int_a^b g(x)\omega(x)dx = \langle p_{n+1}(x)q(x)\rangle + \langle 1, r(x)\rangle.$$

Il primo addendo del membro destro è nullo essendo p_{n+1} ortogonale a $q(x)$. Applicando la (6) con $u(x) = 1$ e $v(x) = r(x)$, e ricordando che il grado di $r(x)$ è al più n, si ottiene che il secondo addendo coincide con $\sum_{k=1}^{n+1} r(x_k)\sigma_k = \sum_{k=1}^{n+1} g(x_k)\sigma_k$. □

Osservazione 16 Dati due polinomi $u(x)$ e $v(y)$ il *bezoutiano* $B(x, y)$ di $u(x)$ e $v(x)$ è il polinomio in due variabili $(u(x)v(y)-u(y)v(x))/(x-y)$. Il bezoutiano ha diverse particolarità interessanti che sono utili in computer algebra. La formula di Cristoffel-Darboux aggiunge una ulteriore proprietà: se u e v sono polinomi ortogonali di grado $n+1$ e n il loro bezoutiano è somma di prodotti di polinomi ortogonali. Si associa al bezoutiano $B(x, y)$ la matrice $B = (b_{i,j})$ tale che $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}$ chiamata *matrice bezoutiana*. È immediato verificare che B è simmetrica e che $B(x, y) = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y}$ dove $\boldsymbol{x} = (x^i)_{i=0,n-1}$, $\boldsymbol{y} = (y^i)_{i=0,n-1}$. Poiché $p_k(x)p_k(y) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{p}^{(k)}\boldsymbol{p}^{(k)T}\boldsymbol{y}$, dove $\boldsymbol{p}^{(k)}$ è il vettore dei coefficienti del polinomio $p_k(x)$, la formula di Christoffel Darboux permette di scrivere la matrice bezoutiana di $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ come somma delle n diadi simmetriche $\frac{1}{\gamma_n h_k}\boldsymbol{p}^{(k)}\boldsymbol{p}^{(k)T}$. La stessa somma di diadi simmetriche permette di scrivere la matrice bezoutiana come $\gamma_n B = L^T L$, dove L è una matrice triangolare inferiore che sulla riga i-esima ha i coefficienti del polinomio $p_i(x)/\sqrt{h_i}$.

Una proprietà interessante della matrice bezoutiana di due polinomi qualsiasi $u(x)$ e $v(x)$è che la sua fattorizzazione UL a blocchi fornisce quozienti e resti generati dall'algoritmo euclideo applicato a $u(x)$ e $v(x)$. Inoltre la matrice bezoutiana è non singolare se e solo se i polinomi $u(x)$ e $v(x)$ sono primi tra loro.

Maggiori informazioni sul bezoutiano, per chi volesse approfondire, si trovano sui lavori:
H.K. Wimmer, "On the History of the Bezoutian and the Resultant Matrix", *Linear Algebra Appl.* 128:27-34(1990),
U. Helmke, P.A. Fuhrmann, "Bezoutians", *Linear Algebra Appl.* 122–124:1039-1097(1989),
G. Heinig, K. Rost, Bezoutians, `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/preprint/.../PREPRINT_09.pdf`
Onorato Nicoletti, "Sulla caratteristica delle matrici di Sylvester e di Bezout", Da una lettera al Prof. Alfredo Capelli, 27 Dicembre 1908 `http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF03018209#page-1` □

2.1 Polinomi ortogonali e matrici tridiagonali

Sia $T_n(x)$ la matrice definita da

$$T_n(x) = \begin{bmatrix} a_1x+b_1 & -a_0 & & & \\ -C_1 & A_2x+B_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -C_{n-1} & A_nx+B_n \end{bmatrix}$$

Applicando la regola di Laplace per calcolare $\det T_n(x)$ lungo l'ultima riga si scopre che

$$\det T_n(x) = (A_nx+B_n)\det T_{n-1}(x) - C_{n-1}\det T_{n-2}(x)$$

inoltre $\det T_1(x) = a_1x + b_1 = p_1(x)$ e $\det T_2(x) = (A_2x + B_2)p_1(x) - C_1p_0(x)$. Per cui vale $\det T_n(x) = p_n(x)$.

È interessante osservare che

$$T_n(x)\begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_n(x) \end{bmatrix}$$

per cui il vettore di componenti $(p_i(x))_{i=0:n-1}$ sta nel nucleo di $T_n(x)$ se x è uno zero di $p_n(x)$.

Osservazione 17 Se i polinomi ortogonali vengono normalizzati in modo che $A_i = 1$ allora gli zeri di $p_n(x)$ possono essere visti come gli autovalori della matrice $T_n := -\mathrm{trid}_n(-C_i, B_i, -1)$, dove per semplicità di notazione si è posto $B_1 = b_1$, e gli autovettori corrispondenti hanno per componenti i valori dei polinomi ortogonali calcolati negli zeri di $p_n(x)$. Vale infatti $T_n(x) = xI - T_n$. Si osservi ancora che la matrice ottenuta cambiando segno agli elementi sopra e sotto diagonali ha gli stessi autovalori della matrice originale e autovettori con componenti a segno alterno. □

Osservazione 18 Assumendo di aver normalizzato i polinomi in modo che $a_0 = A_i = 1$, $i = 1, \ldots, n+1$, poiché i C_i sono tutti positivi, è possibile determinare una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}_n(d_1, \ldots, d_n)$ tale che $D^{-1}T_nD$ è simmetrica. Tale matrice è data da $d_i = \sqrt{h_{i-1}} = \langle p_{i-1}, p_{i-1}\rangle^{1/2}$, $i = 1, \ldots, n-1$ e vale

$$D^{-1}T_n(x)D = \begin{bmatrix} b_1 + x & -\sqrt{C_1} & & & \\ -\sqrt{C_1} & B_2 + x & -\sqrt{C_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\sqrt{C_{n-1}} \\ & & & -\sqrt{C_{n-1}} & B_n + x \end{bmatrix}$$

Gli autovettori $\boldsymbol{v}^{(j)}$ tali che $D^{-1}T_{n+1}(x_j)D\boldsymbol{v}^{(j)} = 0$ sono $\boldsymbol{v}^{(j)} = D^{-1}\boldsymbol{u}^{(j)}$ con $\boldsymbol{u}^{(j)} = (p_0(x_j), \ldots, p_{n-1}(x_j))^T$, dove i polinomi ortogonali $p_i(x)$ sono monici. Dall'ortogonalità dei vettori $\boldsymbol{v}^{(j)}$ segue che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{h_k} p_k(x_i)p_k(x_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Si osservi che $p_k(x)/\sqrt{h_k}$ è il polinomio ortogonale normalizzato rispetto alla sua norma indotta dal prodotto scalare. Questa proprietà era stata ottenuta anche dalla formula di Christoffel Darboux. □

Le proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali sono quindi strettamente legate alle proprietà degli autovalori delle matrici tridiagonali simmetriche. Nel prossimo paragrafo riportiamo un teorema molto utile, di interesse generale, che ci permette di scoprire proprietà interessanti degli zeri dei polinomi ortogonali

2.2 Il teorema del minimax di Courant-Fischer

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ si definisce il quoziente di Rayleigh di A in $\boldsymbol{x}$ l'espressione

$$\frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$$

Osservazione 19 Il gradiente del quoziente di Rayleigh è

$$\frac{2}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}(A-\lambda I)\boldsymbol{x}, \qquad \lambda = \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}.$$

$\square$

Quindi i punti stazionari del quoziente di Rayleigh sono gli autovettori di A e i valori presi dal quoziente in corrispondenza dei punti stazionari sono i corrispondenti autovalori. Questo porta al seguente primo risultato

Teorema 20 *Siano $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ gli autovalori della matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vale*

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \lambda_1, \quad \min_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \lambda_n.$$

Si può dimostrare molto di più:

Teorema 21 (Teorema di Courant-Fischer del minimax) *Vale*

$$\min_{\substack{U\subset\mathbb{R}^n\\ \dim U = k}} \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in U\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \lambda_{n-k+1}, \quad k=1,2,\ldots,n$$

$$\max_{\substack{U\subset\mathbb{R}^n\\ \dim U = k}} \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in U\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \lambda_k, \quad k=1,2,\ldots,n$$

Dim. Si dimostra la versione maxmin. Siano $\boldsymbol{x}_i$ gli autovettori di A ortonormali e S=span$(\boldsymbol{x}_k,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$. Allora per ogni sottospazio V_k di dimensione k vale $S\cap V_k \neq \{0\}$ poiché dim(S)=$n-k+1$ e $\dim(V_k)=k$. Allora esiste $\boldsymbol{x}\in S\cap V_k$, $\boldsymbol{x}=\sum_{i=k}^n \alpha_i\boldsymbol{x}_i \neq 0$. Vale

$$\frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2\lambda_i}{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2} \leq \lambda_k \frac{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2}{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2} = \lambda_k.$$

Quindi il minimo su ogni V_k del quoziente di Rayleigh è minore o uguale a λ_k e quindi anche il massimo al variare di V_k dei minimi è minore o uguale a λ_k. Basta quindi fare vedere che esiste un $\widehat{V}_k$ speciale in cui il minimo del quoziente di Rayleigh vale λ_k. Per questo basta scegliere $\widehat{V}_k$ =span$(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)$. Infatti per $\boldsymbol{x}\in\widehat{V}_k$ risulta $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^k \alpha_i\boldsymbol{x}_i$ per cui

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i\alpha_i^2\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i / \sum_{i=1}^k \alpha_i^2\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i \geq \lambda_k.$$

La versione MinMax del teorema si ottiene applicando la versione MaxMin alla matrice $-A$. $\square$

Alcuni corollari interessanti del teorema del minimax.

Corollario 22 *A matrice reale simmetrica $n \times n$ di autovalori $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$. $U \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ tale che $U^T U = I_{n-1}$. Allora gli autovalori $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{n-1}$ di $B = U^T A U$ sono tali che*

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n.$$

e si dice che gli autovalori di B separano gli autovalori di A.

Dim. Vale

$$\beta_k = \max_{W_k} \min_{\boldsymbol{y}\in W_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \min_{\boldsymbol{y}\in \widehat{W}_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \min_{\boldsymbol{y}\in \widehat{W}_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{y}^T U^T A U\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}$$

dove $\widehat{W}_k$ è il sottospazio dove viene preso il massimo. Sia

$$\widehat{V}_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \in \widehat{W}_k\}.$$

Vale $\dim(\widehat{V}_k) = k$ e

$$\frac{\boldsymbol{y}^T U^T A U\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$$

per cui

$$\beta_k = \min_{\boldsymbol{y}\in \widehat{W}_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{y}^T U^T A U\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \min_{\boldsymbol{x}\in \widehat{V}_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} \leq \max_{V_k} \min_{\boldsymbol{x}\in V_k\setminus 0} \frac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \alpha_k.$$

La diseguaglianza $\beta_{k-1} \geq \alpha_k$ si ottiene applicando il risultato a $-A$ e $-B$. □

Corollario 23 *Se A_n è matrice tridiagonale simmetrica, gli autovalori di una qualsiasi sottomatrice principale di A_n di dimensione $(n-1)\times(n-1)$ separano gli autovalori di A.*

Come conseguenza del teorema del minimax segue l'importante proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali

Teorema 24 *Gli zeri del polinomio ortogonale $p_n(x)$ separano strettamente gli zeri del polinomio ortogonale $p_{n+1}(x)$.*

Dim. La separazione con diseguaglianza debole segue dal corollario 23 applicato alla matrice tridiagonale simmetrica ottenuta simmetrizzando la matrice $\mathrm{trid}_n(-C_i, B_i, -1)$ alla luce delle osservazioni 17, 18. Per dimostrare la diseguaglianza stretta si supponga per assurdo che λ sia zero di p_n e di p_{n-1}. Dalla relazione a tre termini segue che λ è zero di p_{n-1}. Procedendo per induzione si conclude che λ è zero di p_0 che è assurdo. □

Si riportano a titolo di curiosità due altri corollari di cui non si dà dimostrazione.

Corollario 25 *Se A, B, C sono matrici reali simmetriche tali che $A = B + C$ allora per gli autovalori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ordinati in modo non crescente vale*

$$\beta_i + \gamma_n \leq \alpha_i \leq \beta_i + \gamma_1.$$

Corollario 26 *Se A, B, C sono matrici reali simmetriche tali che $A = B + C$ e $C = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ per un vettore nonnullo $\boldsymbol{u}$, allora per gli autovalori α_i, β_i di A e B ordinati in modo non crescente vale*

$$\beta_i \leq \alpha_i \leq \beta_{i+1}$$

3 Rappresentazione di polinomi ortogonali

Oltre alla rappresentazione data mediante la relazione ricorrente a tre termini esistono altri modi per rappresentare i polinomi ortogonali. In questo paragrafo esaminiamo due rappresentazioni diverse, quella basata sulla matrice dei momenti e quella data dalla formula di Rodrigues.

3.1 Matrice dei momenti

Le quantità $\mu_k = \int_a^b x^k \omega(x)dx$, $k = 0, 1, \ldots, n$, vengono dette *momenti*. Vale il seguente risultato

Teorema 27 *I seguenti polinomi sono ortogonali rispetto al prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$*

$$p_n(x) = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \ldots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \ldots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \ldots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Dim. Basta verificare che $\langle x^k, p_n(x)\rangle = 0$ per $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Per la linearità dell'integrale e la multilinearità del determinante si ha che $\langle x^k, p_n(x)\rangle$ è uguale al determinante della matrice che si ottiene sostituendo l'ultima riga della matrice in (7) con $(\int_a^b x^k, \int_a^b x^{k+1}, \ldots, \int_a^b x^{k+n})$, cioè $(\mu_k, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_{k+n})$. Questo determinante è nullo poiché la matrice ha due righe uguali. $\square$

Osservazione 28 Col prodotto scalare su $[0, 1]$ definito da $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, la sottomatrice principale di testa $n \times n$ della matrice dei momenti è la matrice di Hilbert di elementi $(1/(i + j - 1))$ per $i, j = 1, \ldots, n$. Le sottomatrice principali di testa di dimensione minore o uguale a n di una matrice dei momenti sono *matrici di Hankel*. Cioè i loro elementi dipendono dalla somma degli indici e quindi sono costanti lungo le anti-diagonali. Si può dimostrare che l'inversa di una matrice di Hankel non singolare è una matrice di Bezout. $\square$

Osservazione 29 Si ricorda che se A è una matrice reale simmetrica definita positiva allora l'applicazione $(u,v) \to u^T Av$ da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare. Se denotiamo H_n la matrice di elementi μ_{i+j-2}, $i,j = 1,\dots,n$, si ha $\mu_{i+j-2} = \langle x^{i-1}, x^{j-1}\rangle$ per $i,j = 1,\dots,n$. Per cui $u^T H_n v = \sum_i \sum_j u_i \mu_{i+j-1} v_j = \langle \sum_i u_i x^{i-1}, \sum_j v_j x^{j-1}\rangle$ non è altro he il prodotto scalare tra il polinomio di coefficienti $u_1,\dots,u_n$ e il polinomio di coefficienti $v_1,\dots,v_n$. Cioè H_n descrive il prodotto scalare di tipo integrale tra polinomi in termini dei loro coefficienti.

Si osserva ancora che se $H_n = LL^T$ è la fattorizzazione di Cholesky di H_n, dove L è triangolare inferiore $n \times n$, allora dalla condizione $(L^{-1})^T H_n L^{-1} = I$ segue che le righe di $(L^{-1})^T)$ sono i coefficienti dei polinomi ortogonali normalizzati in modo da avere norma 1. Avevamo inoltre puntualizzato nell'Osservazione 16, come conseguenza della formula di Christoffel Darboux, che la matrice di Bezout B_n di $p_n(x)$ e $p_{n-1}(x)$ si fattorizza nel prodotto $B = \widehat{L}^T \widehat{L}$ dove $\widehat{L}$ è triangolare inferiore e le colonne di L hanno per elementi i coefficienti del generico polinomio ortogonale normalizzato per cui vale $\widehat{L} = L^{-1}$. Allora, confrontando la relazione $= \widehat{L}^T \widehat{L}$ e $H^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1}$ si deduce che $H_n = B_n^{-1}$. □

3.2 Formula di Rodrigues

Teorema 30 *Sia $s(x) \in C^n[a,b]$, $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Allora la funzione $t(x) = s^{(n)}(x)/\omega(x)$ è ortogonale a ogni polinomio di grado al più $n-1$ col prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$.*

Dim. Sia $q(x)$ polinomio di grado $k \le n-1$. Allora $\left\langle q, s^{(n)}/\omega(n)\right\rangle = \int_a^b \omega(x)q(x)\frac{s^{(n)}}{\omega(x)}dx = \int_a^b q(x)s^{(n)}(x)dx$. Integrando per parti si ha

$$\left\langle q, \frac{s^{(n)}(x)}{\omega(x)}\right\rangle = [q(x)s^{(n-1)}(x)]_a^b - \int_a^b q'(x)s^{(n-1)}(x)dx$$
$$= -\int_a^b q'(x)s^{(n-1)}(x)dx = \dots = (-1)^n \int_a^b q^{(n)}(x)s(x)dx = 0$$

poiché $q^{(n)} = 0$ essendo il grado di q minore di n. □

Osservazione 31 Nelle ipotesi del teorema, se $s^{(n)}(x)/\omega(x)$ è un polinomio di grado n allora esso coincide con $p_n(x)$. □

Ciò permette di esprimere i polinomi ortogonali mediante la *Formula di Rodrigues*

$$\begin{aligned} & p_n(x) = \frac{\beta_n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} s_n(x), \quad n = 0,1,\dots, \\ & \beta_n \in \mathbb{R}, \quad s_n(x) \in C^n[a,b], :\; s_n^{(k)}(a) = s_n^{(k)}(b) = 0,\; k = 0,1,\dots,n-1, \\ & \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} s_n(x), \quad \text{polinomio di grado } n. \end{aligned} \tag{8}$$

$[a,b]$	$\omega(x)$	$s_n(x)$	Nome
$[-1,1]$	1	$(1-x^2)^n$	Legendre
$[-1,1]$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$(1-x^2)^{n-1/2}$	Chebyshev di prima specie
$[-1,1]$	$(1-x^2)^{1/2}$	$(1-x^2)^{n+1/2}$	Chebyshev di seconda specie
$[0,+\infty]$	e^{-x}	$e^{-x}x^n$	Laguerre
$[-\infty,+\infty]$	e^{-x^2}	e^{-x^2}	Hermite

Tabella 1: Tassonomia dei principali polinomi ortogonali

I valori dei β_n sono scelti in modo da normalizzare i polinomi in modo più conveniente a seconda dei casi.

4 Polinomi ortogonali specifici

Nella tabella 1 si riportano le definizioni dei polinomi ortogonali classici di Legendre, Chebyshev di prima e di seconda specie, Laguerre ed Hermite.

I polinomi di Legendre e di Chebyshev sono casi particolari dei *polinomi ultrasferici*, noti anche come polinomi di *Gegenbauer* cioè i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ rispetto al peso $\omega = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$. Per questi polinomi è possibile dare una espressione dei coefficienti in termini della funzione Γ di Eulero `http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function`

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

Tale funzione è estendibile a $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0,-1,-2,\ldots$, mediante l'espressione

$$\Gamma(x) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

Non solo, ma è possibile dare una forma esplicita alla funzione $s(x)$ nella formula di Rodrigues, infatti vale $s(x) = (x^2-1)^{n+\alpha}$.

Osservazione 32 La Funzione Gamma di Eulero gode di molte proprietà interessanti tra cui

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,-1,-2,\ldots \\
&\Gamma(1) = 1 \\
&\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{se } n \text{ è intero}
\end{aligned}$$

Vale inoltre

$$\frac{d^n x^\alpha}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)}x^{\alpha-n}$$

Per ulteriori proprietà si veda [2]. □

Teorema 33 *Se* $\omega(x) = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, $s_n(x) = (1-x^2)^{\alpha+n}$, *allora* $\frac{s_n^{(n)}(x)}{\omega(x)}$ *è polinomio di grado* n *e vale* $s_n^{(k)}(1) = s_n^{(k)}(-1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Vale inoltre*

$$\frac{s_n^{(n)}(x)}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)^2}{\Gamma(\alpha+j+1)\Gamma(\alpha+n-j+1)} (1-x)^{n-j}(1+x)^j.$$

Dim. Se $n = 0$ è $\frac{s_0^{(0)}}{\omega(x)} = \frac{(1-x^2)^\alpha}{(1-x^2)^\alpha} = 1$. Se $n > 0$ pongo $z = \alpha + n$ e ho

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^z &= \frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^z(1+x)^z] \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^j}{dx^j}(1-x)^z \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}(1+x)^z \end{aligned}$$

D'altro canto vale

$$\frac{d^m}{dx^m} x^\theta = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta-m+1)} x^{\theta-m}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^z &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-j+1)} (1-x)^{z-j} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+j+1)} (1+x)^{z-k+j} \\ &= (1-x^2)^{z-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\Gamma(z+1)^2 (1-x)^{k-j}(1+x)^j}{\Gamma(z-j+1)\Gamma(z-k+j+1)} \end{aligned}$$

che diviso per $\omega(x) = (1-x^2)^\alpha$ è un polinomio in x. Inoltre, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ è $z - k \geq \alpha + 1 > 0$ per cui $s_n^{(k)}(-1) = s_n^{(k)}(1) = 0$. Infine per $k = n$ vale $s_n^{(n)}(x) = (1-x^2)^{z-n}\phi(x)$, dove $\phi(x)$ è un polinomio, per cui $\frac{s_n^{(n)}(x)}{(1-x^2)^\alpha}$ è un polinomio □

Per i polinomi ultrasferici $p_{n,\alpha}(x)$ vale allora la formula

$$p_{n,\alpha}(x) = \beta_{n,\alpha} \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{\alpha+n}$$

Dal teorema precedente si possono ricavare le espressioni di a_n, h_n in funzione di Γ.

Si osservi che vale ancora $p_{n,\alpha}(-x) = (-1)^n p_{n,\alpha}(x)$ per cui $p_{n,\alpha}$ ha coefficienti nulli per le potenze che hanno esponente con la stessa parità di $n+1$. Conseguentemente il coefficienti B_n nella relazione ricorrente a tre termini sono nulli.

4.1 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre sono polinomi ultrasferici con $\alpha = 0$, e la relazione ricorrente a tre termini è data da

$$\begin{aligned} &p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(x) \\ &p_0 = 1, \quad p_1 = x \end{aligned}$$

In particolare

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

La matrice tridiagonale associata è

$$\begin{bmatrix} x & -1 & & & & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}x & -1 & & & & \\ & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3}x & -1 & & & \\ & & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4}x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\frac{i}{i+1} & \frac{2i+1}{i+1}x & -1 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

che normalizzando i polinomi a essere monici diventa

$$\begin{bmatrix} x & -1 & & & & & \\ -\frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{5} & x & -\frac{3}{5} & & & \\ & & -\frac{3}{7} & x & -\frac{4}{7} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\frac{i}{2i+1} & x & -\frac{i+1}{2i+1} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

La sua simmetrizzazione è data da

$$\begin{bmatrix} x & -\frac{1}{\sqrt{3}} & & & & & \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & x & -\frac{2}{\sqrt{15}} & & & & \\ & -\frac{2}{\sqrt{15}} & x & -\frac{3}{\sqrt{35}} & & & \\ & & -\frac{3}{\sqrt{35}} & x & -\frac{4}{\sqrt{63}} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & x & -\frac{i}{\sqrt{(2i+1)(2i-1)}} \\ & & & & & -\frac{i}{\sqrt{(2i+1)(2i-1)}} & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Gli zeri del polinomio di Legendre di grado n sono gli autovalori della matrice $\mathrm{trid}_n((i-1)/(2i-1), 0, i/(2i+1))$ tridiagonale $n \times n$ dove l'indice i scorre da 1 a n e sulla prima ed ultima riga compaiono due soli elementi dei tre indicati.

Il seguente codice Octave calcola tali zeri come autovalori della matrice tridiagonale con $n = 6$:

```
n = 6;
T = zeros(n);
for i=1:n-1;
   T(i,i+1) = i/sqrt((2*i-1)*(2i+1));
end;
T=T+T';
zeri=eig(T);
```

Infatti, scrivendo `sort(zeri)'` (l'apice serve per fare scrivere gli autovalori come vettore riga) Octave fornisce i valori

```
ans =
-0.93247  -0.66121  -0.23862   0.23862   0.66121   0.93247
```

4.2 Polinomi di Chebyshev di prima specie

I polinomi di Chebyshev di prima specie rientrano nella classe dei polinomi ultrasferici con $\alpha = -1/2$. Si consideri la successione di polinomi definita da

$$\begin{aligned} &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x \end{aligned}$$

Ponendo $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, dalla relazione a tre termini segue che $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. La dimostrazione può essere fatta per induzione. Infatti per $n = 0, 1$ la proprietà è banalmente verificata. In generale, per l'ipotesi induttiva vale

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

Da cui

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos\theta) =& 2\cos\theta\cos n\theta - \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\ =& \cos\theta\cos n\theta - \sin n\theta\sin\theta = \cos(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Questo fatto permette di dimostrare che i polinomi $T_n(x)$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare sull'intervallo $[-1, 1]$ con peso $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Infatti mediante la sostituzione $x = \cos\theta$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle T_n(x), T_m(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\theta}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Se $m \neq n$, $m, n \geq 0$, allora l'integrale di $\cos(n\theta)\cos(m\theta)$ vale 0 essendo $\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}(\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta))$.

Un'altra conseguenza del fatto che $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ è che è possibile dare una espressione esplicita agli zeri $x_k^{(n)}$ di $T_n(x)$. Infatti vale $x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$. Inoltre su $[-1, 1]$ il polinomio $T_n(x)$ è sempre compreso tra -1 e 1.

Si osservi anche che $T_n(\cos\theta) = \pm 1$ se e solo se $\cos(n\theta) = \pm 1$, se e solo se $n\theta = k\pi$, se e solo se $\theta = k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots n$. Cioè nell'intervallo $[-1, 1]$ il polinomio $T_n(x)$ assume $n+1$ volte i valori massimi e minimi.

Teorema 34 *Tra tutti i polinomi monici di grado $n \geq 1$ il polinomio monico $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ è quello che ha minima norma infinito su $[-1, 1]$*

Dim. Si è già osservato che $T_n(x)$ assume il valore massimo 1 e il valore minimo -1 per $n+1$ volte. Quindi $\|T_n(x)\|_\infty = 1$ e $\|T_n(x)/2^n\|_\infty = 1/2^{n-1}$. Supponiamo per assurdo che esista un polinomio p_n monico di grado n tale che $\|p_n(x)\|_\infty < 1/2^{n-1}$. Il polinomio $p_n(x)$ ha massimo minore di $1/2^{n-1}$ e minimo maggiore di $-1/2^{n-1}$. Quindi il polinomio differenza $q(x) = p_n(x) - T_n(x)/2^{n-1}$ di grado al più $n-1$ è negativo dove T_n ha massimo e positivo dove T_n ha minimo. Ciò accade in $n+1$ punti di $[-1, 1]$. Quindi $q(x)$ ha n zeri. Il che è assurdo.$\square$

La matrice tridiagonale associata ai polinomi di Chebyshev di prima specie è

$$\begin{bmatrix} x & -1 & & & & \\ -1 & 2x & -1 & & & \\ & -1 & 2x & -1 & & \\ & & -1 & 2x & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Osservazione 35 Vediamo che forma assume la proprietà di ortogonalità discreta (5) per i polinomi di Chebyshev di prima specie. Per quanto riguarda le costanti h_k si ha

$$h_k = \langle T_k(x), T_k(x) \rangle = \int_{-1}^{1} T_k(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Con la sostituzione di variabile $x = \cos\theta$ si ottiene quindi

$$h_k = \int_0^\pi \cos^2 k\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } k \neq 0, \\ \pi & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda i coefficienti σ_k si può dimostrare che

$$\sigma_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Quindi la poprietà di ortogonalità discreta dei polinomi di Chebyshev diventa

$$\sum_{k=1}^{n} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} \frac{n}{2}\delta_{i,j} \text{ se } i \neq 0 \\ n\delta_{i,j} \text{ se } i = 0. \end{cases}$$

La matrice $C = (c_{i,j})$ di elementi $c_{i,j} = T_j(x_{i-1})$ definisce la trasformata discreta dei coseni di secondo tipo `http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform` e gode della proprietà che $C^T C = n\mathrm{diag}(1, 1/2, \dots, 1/2)$.

Inoltre il prodotto scalare nella forma discreta assume la forma

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} p(x_k) q(x_k). \tag{9}$$

Osservazione 36 Un polinomio $q(x)$ di grado n può essere rappresentato nella base di Chebyshev come $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$. Data l'ortogonalità dei polinomi $T_k(x)$, i valori di a_k possono essere calcolati come

$$a_k = \langle q(x), T_k(x) \rangle / \langle T_k(x), T_k(x) \rangle.$$

Poiché il prodotto scalare può essere scritto in forma discreta 9, si ha

$$a_k = \frac{\pi}{n} \frac{1}{h_k} \sum_{s=1}^{n} q(x_s) T_k(x_s) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} q(x_s) T_k(x_s) & \text{per } k = 0 \\ \frac{2}{n} \sum_{s=0}^{n-1} q(x_s) T_k(x_s) & \text{per } k > 0 \end{cases}$$

La somma infinita

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

se convergente, definisce una funzione $f(x)$ ed è chiamata *serie di Chebyshev* di $f(x)$. Data una funzione $f(x)$ le condizioni a cui deve soddisfare $f(x)$ affinché esista convergente la serie di Chebyshev sono analoghe a quelle valide per la convergenza della serie di Fourier.

La function Octave riportata nel listing 1 crea una matrice `t` di dimensioni $m \times n$ che ha nella colonna j-esima i valori di $T_{j-1}(x)$ calcolati in m punti equispaziati tra -1 e 1. Mentre la function riportata nel listing 2 crea una matrice `t` di dimensioni $n \times n$ che ha nella colonna j-esima i valori di $T_{j-1}(x)$ calcolati negli n zeri del polinomio di Chebyshev $T_n(x)$ di prima specie di grado n.

In questo modo, con i seguenti comandi

```
t = cheby1(100,6);
x = t(:,2);
plot(x,t(:,2),x,t(:,3),x,t(:,4),x,t(:,5),x,t(:,6));
```

si tracciano i grafici dei primi 6 polinomi di Chebyshev di prima specie riportati nella figura 1. Mentre scrivendo

```
t=chebyshev1(6);
t'*t
```

si ottiene la matrice numericamente diagonale

Listing 1: Function cheby1

```
function t=cheby1(m,n)
% function t=cheby1(m,n)
% output: t e' la matrice mxn la cui colonna j-esima contiene i valori
% del polinomio di Chebyshev di prima specie grado j-1 campionato nei
% punti x_i=(-1+ i*2/(m-1)) per i=0,1,...,m-1
  t = ones(m,n);
  x = [-1:2/(m-1):1]';
  t(:,2) = x;
  for j=3:n
     t(:,j) = 2*x.*t(:,j-1) - t(:,j-2);
  end
```

Listing 2: Function chebyshev1

```
function t=chebyshev1(n)
% function t=chebyshev1(n)
% output: t e' la matrice nxn la cui colonna j-esima contiene i valori
% del polinomio di Chebyshev di prima specie grado j-1 campionato negli
% zeri del polinomio di Chebyshev di grado n: x_k=cos((2k-1)pi/(2n))
% per k=1,...,n
  t = ones(n);
  x = cos([pi/(2*n): pi/n : (2*n-1)*pi/(2*n)]');
  t(:,2) = x;
  for j=3:n
     t(:,j) = 2*x.*t(:,j-1) - t(:,j-2);
  end
```

```
ans =

   6.00000   0.00000   0.00000   0.00000  -0.00000   0.00000
   0.00000   3.00000   0.00000  -0.00000   0.00000  -0.00000
   0.00000   0.00000   3.00000   0.00000  -0.00000   0.00000
   0.00000  -0.00000   0.00000   3.00000   0.00000  -0.00000
  -0.00000   0.00000  -0.00000   0.00000   3.00000   0.00000
   0.00000  -0.00000   0.00000  -0.00000   0.00000   3.00000
```

che conferma l'ortogonalità delle colonne di `t` per $n = 6$.

4.3 Polinomi di Chebyshev di seconda specie

Anche i polinomi di Chebyshev di seconda specie rientrano nella classe dei polinomi ultrasferici. Sono definiti da $\alpha = 1/2$ e soddisfano la relazione ricorrente

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}$$
$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x$$

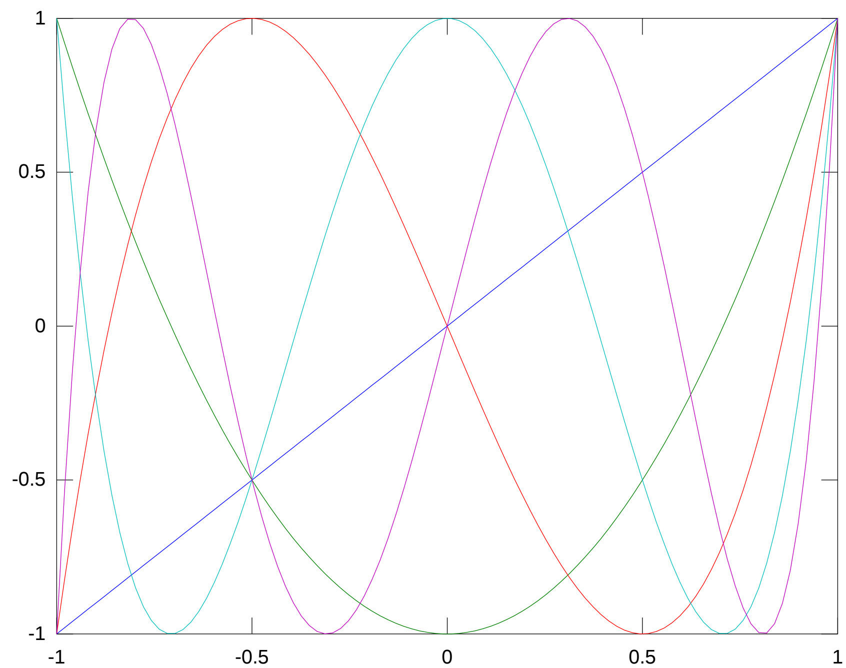


Figura 1: Polynomi di Chebyshev di prima specie

Dalla relazione a tre termini segue che ponendo $x = \cos\theta$ risulta

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

Quindi gli zeri di $U_n(x)$ sono $x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$.

Si osserva che

$$\frac{dT_n}{dx} = \frac{dT_n(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\cos(n\theta)}{d\theta} \Big/ \frac{d\cos\theta}{d\theta} = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

che implica

$$T_n'(x) = nU_{n-1}(x).$$

La matrice tridiagonale associata ai polinomi di Chebyshev di seconda specie è

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 & & & & \\ -1 & 2x & -1 & & & \\ & -1 & 2x & -1 & & \\ & & -1 & 2x & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

La function Octave riportata nel listing 3 crea una matrice `u` di dimensioni $m \times n$ che ha nella colonna j-esima i valori di $U_{j-1}(x)$ calcolati in m punti equispaziati tra -1 e 1. Mentre la function riportata nel listing 4 crea una matrice `u` di dimensioni $n \times n$ che ha nella colonna j-esima i valori di $U_{j-1}(x)$ calcolati negli n zeri del polinomio di Chebyshev $U_n(x)$ di seconda specie di grado n.

In questo modo, con i seguenti comandi

```
u = cheby1(100,6);
x = [-1:2/99:1];
plot(x,u(:,2),x,u(:,3),x,u(:,4),x,u(:,5),x,u(:,6));
```

si tracciano i grafici dei primi 6 polinomi di Chebyshev di seconda specie riportati nella figura 2. Mentre scrivendo

```
u = chebyshev2(6);
u*u'
```

si ottiene la matrice numericamente diagonale

```
 1.8592e+01  -1.7048e-15   1.3849e-15  -6.6331e-16   5.0209e-16  -4.0007e-16
-1.7048e-15   5.7259e+00  -4.9922e-16   9.9204e-17  -1.6046e-16  -5.1337e-16
 1.3849e-15  -4.9922e-16   3.6823e+00   2.9891e-16  -1.9125e-16   8.2611e-16
-6.6331e-16   9.9204e-17   2.9891e-16   3.6823e+00  -3.9411e-17  -5.7718e-16
 5.0209e-16  -1.6046e-16  -1.9125e-16  -3.9411e-17   5.7259e+00   2.0095e-15
-4.0007e-16  -5.1337e-16   8.2611e-16  -5.7718e-16   2.0095e-15   1.8592e+01
```

Listing 3: Function cheby2

```
function t=cheby2(m,n)
% function t=cheby1(m,n)
% output: t e' la matrice mxn la cui colonna j-esima contiene i valori
% del polinomio di Chebyshev di seconda specie grado j-1 campionato nei
% punti x_i=(-1+ i*2/(m-1)) per i=0,1,...,m-1
  t = ones(m,n);
  x = [-1:2/(m-1):1]';
  t(:,2) = 2*x;
  for j=3:n
     t(:,j) = 2*x.*t(:,j-1) - t(:,j-2);
  end
```

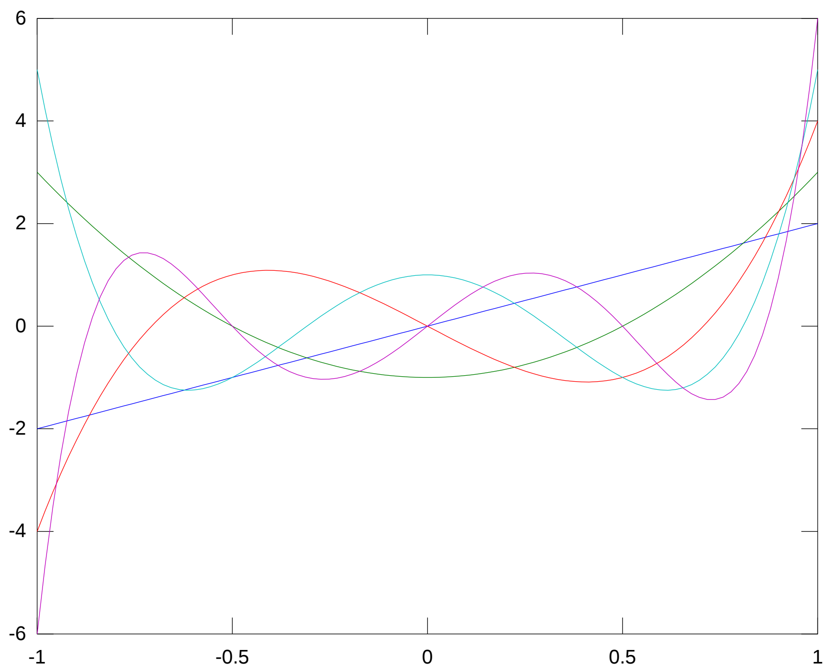


Figura 2: Polynomi di Chebyshev di seconda specie

Listing 4: Function chebyshev2

```
function t=chebyshev2(n)
% function t=chebyshev2(n)
% output: t e' la matrice nxn la cui colonna j-esima contiene i valori
% del polinomio di Chebyshev di seconda specie grado j-1 campionato negli
% zeri del polinomio di Chebyshev di grado n: x_k=cos(k*pi/(n+1))
% per k=1,...,n
  t = ones(n);
  x = cos([pi/(n+1): pi/(n+1) : n*pi/(n+1)]');
  t(:,2) = 2*x;
  for j=3:n
     t(:,j) = 2*x.*t(:,j-1) - t(:,j-2);
  end
```

4.4 Polinomi di Laguerre

Peso $\omega(x) = e^{-x}$, intervallo $[0, +\infty]$. Coefficienti della ricorrenza a tre termini: $A_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, $B_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$, $C_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\left((2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\right) \\ L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = 1-x \end{aligned}$$

Matrice tridiagonale associata

$$\mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \begin{bmatrix} 1-x & -1 & & & & \\ -1 & 3-x & -1 & & & \\ & -2 & 5-x & -1 & & \\ & & -3 & 7-x & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.5 Polinomi di Hermite

Peso $\omega(x) = e^{-x^2}$, intervallo $[-\infty, +\infty]$. Ricorrenza a tre termini:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = 2x \end{aligned}$$

Matrice tridiagonale associata

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 & & & & \\ -2 & 2x & -1 & & & \\ & -4 & 2x & -1 & & \\ & & -6 & 2x & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

5 Il problema dell'approssimazione di funzioni

Lo scopo è quello di approssimare funzioni continue $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove K è un compatto, con polinomi o con funzioni facilmente calcolabili, ad esempio, polinomi o funzioni razionali. La funzione $f(x)$ può essere assegnata esplicitamente in termini di funzioni elementari oppure essere assegnata formalmente come soluzione di una equazione differenziale.

Per semplicità lavoriamo su $\mathbb{R}$ e scegliamo $K = [a, b]$.

La scelta di usare polinomi è saggia dal punto di vista computazionale, ma lo è anche dal punto di vista dell'approssimazione. Vale infatti

Teorema 37 (Weierstrass) *Per ogni $f(x) : K \to \mathbb{R}$ continua e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio $p_\epsilon(x)$ tale che $\max_{x\in K} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leq \epsilon$.*

Denotiamo $\mathcal{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado al più n. Denotiamo $d(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \max_{x\in K} |f(x) - p(x)|$.

5.1 Il problema dell'approssimazione lineare

Viene fissato un "modello" di approssimazione scegliendo un insieme di funzioni continue $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ e si cerca di approssimare nel modo migliore possibile una funzione assegnata $f(x) \in C[a, b]$ mediante $g(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)$.

Le funzioni $\varphi_i(x)$ devono essere computazionalmente facili e in grado di approssimare bene la $f(x)$. Ad esempio, i polinomi non sono adatti ad approsimare funzioni che hanno asintoti verticali (in questo caso l'insieme in cui sono definite le funzioni non è un compatto). In questo caso le funzioni razionali si prestano meglio. Similmente per funzioni periodiche sono più adatte le funzioni trigonometriche.

Sia $\mathcal{V}$ spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Definizione 38 $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *è una norma se per ogni $x, y \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è*

$$\begin{aligned}
&\|x\| \geq 0 \\
&\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
&\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \\
&\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \textit{diseguaglianza triangolare}
\end{aligned}$$

Teorema 39 *Ogni norma su $\mathcal{V}$ è funzione uniformemente continua nella topologia indotta dalla norma.*

Dim. Dalla diseguaglianza triangolare segue che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Quindi $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ ($\delta = \epsilon$): $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \epsilon$. □

Esempi di norme su $C[a, b]$:

$$\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Dato un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $C[a,b]$, ad esempio $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$, si definisce norma indotta dal prodotto scalare

$$\|f(x)\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Poblema dell'approssimazione lineare Data $f(x) \in C[a,b]$ e l'insieme di funzioni linearmente indipendenti $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$, data una norma $\|\cdot\|$ e un intero n, calcolare α_i^*, $i = 0, 1, \ldots, n$ tali che la funzione $g_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^* \varphi_i(x)$ è tale che

$$\|f(x) - g_n(x)\| = \min_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} \|f(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)\|.$$

La funzione $g_n(x)$ è detta *funzione di migliore approssimazione*
$r_n(x) = f(x) - g_n(x)$ è detto *resto dell'approssimazione*
$\delta_n = \|r_n(x)\|$ è detto *errore assoluto in norma*

Osservazione 40 Se $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ allora la funzione di migliore approssimazione $g_n(x)$ di $f(x)$ è tale che $|r_n(x)| = |f(x) - g_n(x)| \le \delta_n$ $\forall x \in [a,b]$. In questo caso si parla di *approssimazione uniforme*. Se $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ non è vero che $|r_n(x)| \le \delta_n$ per ogni $x \in [a,b]$. Si consideri ad esempio $r_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Vale $\|r_n(x)\|_\infty = 1$ mentre $\|r_n(x)\|_2 = 1/\sqrt{2n+1}$ che può essere arbitrariamente piccola. $\square$

Teorema 41 *Sia $\mathcal{F} = \{f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ uno spazio di funzioni dotoato di norma $\|\cdot\|$, e sia $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$ un sottospazio di $\mathcal{F}$ generato da un insieme di funzioni linearmente indipendenti $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Allora*

- *il problema dell'approssimazione lineare su $\mathcal{G}_n$ ha soluzione;*
- *l'insieme delle soluzioni è convesso;*
- *la successione $\{\delta_n\}$ è non crescente;*
- *esiste $\lim_n \delta_n \ge 0$.*

Dim. Dimostriamo che il problema ha soluzione. L'idea della dimostrazione consiste nel verificare che l'inf del resto si può restringere all'insieme $\{\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \|\alpha\|_\infty \le \gamma\}$ per una opportuna costante γ. Poichè questo insieme è un compatto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e la norma è continua esiste il minimo e quindi il problema dell'approssimazione lineare ha soluzione. Tecnicamente si introducono le funzioni $c(\alpha) = \|\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\|$ e $d(\alpha) = \|f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i\|$ che sono continue. Per cui $c(\alpha)$ ha minimo su $S = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \|\alpha\|_\infty = 1\}$. Sia γ il minimo. Vale $\gamma \ne 0$ poiché φ_i sono linearmente indipendenti. Vale

$$c(\alpha) = \|\sum \frac{\alpha_i}{\|\alpha\|_\infty} \varphi_i\| \cdot \|\alpha\|_\infty \ge \gamma \|\alpha\|_\infty$$

inoltre

$$d(\alpha) = \|f - \sum \alpha_i \varphi_i\| \geq \| \sum \alpha_i \varphi_i\| - \|f\| \geq \gamma \|\alpha\|_\infty - \|f\|.$$

Posto $t = \inf d(\alpha)$ si scelga μ tale che $\mu \geq \frac{t+\|f\|}{\gamma}$. Risulta che se $\|\alpha\|_\infty > \mu$ allora $d(\alpha) \geq \gamma\|\alpha\|_\infty - \|f\| > \gamma\mu - \|f\| \geq t$, per cui

$$t = \inf_\alpha d(\alpha) = \inf_{\|\alpha\|_\infty \leq \mu} d(\alpha).$$

Ma poiché $\{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|\alpha\|_\infty \leq \mu\}$ è compatto, l'inf è un minimo. Esiste quindi $g_n(x) \in \mathcal{G}_n$ tale che $\|f(x) - g_n(x)\| = t$ è minimo.

Per dimostrare la convessità: siano g_n e $\hat{g}_n$ due funzioni di $\mathcal{G}_n$ tali che $\|f - g_n\| = \|f - \hat{g}_n\|$ è il minimo. Per $\lambda \in [0,1]$ vale

$$\begin{aligned} \|f - (\lambda g_n + (1-\lambda)\hat{g}_n)\| =& \|\lambda f - (1-\lambda) f - (\lambda g_n + (1-\lambda)\hat{g}_n\| \\ =& \|\lambda(f - g_n) + (1-\lambda)(f - \hat{g}_n)\| \\ \leq& \lambda\|f - g_n\| + (1-\lambda)\|f - \hat{g}_n\| = \|f - g_n\| \end{aligned}$$

Quindi anche $\lambda g_n + (1-\lambda)\hat{g}_n$ è funzione di migliore approssimazione. Per la non crescenza dei δ_n basta osservare che δ_{n+1} è il minimo ottenuto su un insieme più ampio. □

Osservazione 42 Il problema lineare di approssimazione ha una oppure infinite soluzioni. □

Osservazione 43 Il teorema precedente non garantisce che $\delta_n \to 0$ e che quindi g_n è una "buona approssimazione". □

Definizione 44 $\mathcal{F}$ *è* strettamente convesso *rispetto alla norma* $\|\cdot\|$ *se per ogni* $f, g \in \mathcal{F}, \ f \neq g$, *vale*

$$\|f\| \leq m, \ \|g\| \leq m \Rightarrow \|f + g\| < 2m.$$

Osservazione 45 $\mathbb{R}^2$ con la norma infinito non è strettamente convesso infatti $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ e i tre vettori hanno tutti norma infinito 1. Mentre $\mathbb{R}^2$ con la norma 2 è strettamente convesso. □

Teorema 46 *Se* $\mathcal{F}$ *è strettamente convesso allora il problema dell'approssimazione lineare ha una sola soluzione*

Dim. Se esistono $g_n \neq \hat{g}_n$ funzioni di migliore approssimazione allora

$$\|f - g_n\| = \|f - \hat{g}_n\| = \delta_n$$

quindi per la stretta convessità vale $\|f - g_n + f - \hat{g}_n\| < 2\delta_n$ e quindi la funzione $h(x) = \frac{1}{2}(g_n(x) + \hat{g}_n(x))$ è tale che $\|f - h\| < \delta_n$ che è assurdo. □

Il teorema precedente non garantisce ancora che $\lim \delta_n = 0$.

5.2 Richiami sugli spazi di Banach e di Hilbert.

Definizione 47 *Sia $\mathcal{V}$ spazio vettoriale normato. Una successione $f_n \in \mathcal{V}$ è di Cauchy se $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0$: $\forall m, n \geq n_0$ $\|f_m - f_n\| \leq \epsilon$.*

Esempi:

- $\mathcal{V} = C[0,1]$, $\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$: $f_n(x) = x^n$ non è di Cauchy. Infatti $x^n - x^{2n}$ per $x = (1/2)^{1/n}$ vale $1/4$ qualsiasi sia n.
- $\mathcal{V} = C[0,1]$ con la norma $\|f\|_2 = (\int_0^1 f(x)^2 dx)^{1/2}$: $f_n(x) = x^n$ è di Cauchy. Infatti $\int_0^1 (x^m - x^n)^2 dx = ...$

Definizione 48 *Uno spazio vettoriale normato $\mathcal{B}$ è di Banach se ogni successione di Cauchy $\{f_n\}$ converge in norma ad un elemento $f \in \mathcal{B}$. Cioè se esiste $f \in \mathcal{B}$ tale che $\lim_n \|f_n - f\| = 0$.*

Esempi di spazi di Banach

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$;
- $C[a,b]$ con $\|\cdot\|_\infty$;
- funzioni continue da un compatto $K \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con $\|\cdot\|_\infty$;
- funzioni analitiche da un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ con $\|\cdot\|_\infty$;
- $\ell^p = \{(x_i)_{i=1,2,\ldots} \in \mathbb{R}^\infty : \quad \sum_i |x_i|^p < +\infty\}$ con $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- $\ell^\infty = \{(x_i)_{i=1,2,\ldots} \in \mathbb{R}^\infty : \quad \sup_i |x_i| < +\infty\}$ con $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

Osservazione 49 Nello spazio vettoriale $\{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \quad \int_a^b |f|^p dx < +\infty$ (int. di Lebesgue)$\}$ l'applicazione $f \to \|f\|_p = (\int_a^b |f|^p dx)^{1/p}$ non è norma poiché esistono $f(x) \neq 0$: $\|f\|_p = 0$. Ma diventa una norma nello spazio quoziente con la relazione di equivalenza $f \equiv g$ se $\|f - g\|_p = 0$. Questo spazio è denotato con L^p ed è di Banach. $\square$

Un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce una norma $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

Definizione 50 *Uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è di Hilbert se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di $\mathcal{H}$ nella norma $\|\cdot\|$ indotta dal prodotto scalare.*

Osservazione 51 Non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare. Non tutti gli spazi di Banach sono di Hilbert. $\square$

Osservazione 52 Lo spazio $C[a,b]$ col prodotto scalare $\langle f,g\rangle = (\int_a^b f(x)g(x)dx)^{1/2}$ non è di Hilbert. Infatti con $[a,b]=[0,2]$, la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

è di Cauchy, ma la successione non ha limite in $C[0,2]$. $\square$

Teorema 53 *Una norma sullo spazio $\mathcal{V}$ è indotta da un prodotto scalare se e solo se vale la legge del parallelogramma*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

e vale

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) \quad su\ \mathbb{R}$$
$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \boldsymbol{i}(\|u+\boldsymbol{i}v\|^2 - \|u-\boldsymbol{i}v\|^2)) \quad su\ \mathbb{C}.$$

dove $\boldsymbol{i}$ è l'unità immaginaria tale che $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Corollario 54 *Uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ con norma indotta da un prodotto scalare è strettamente convesso.*

Dim. Dalla legge del parallelogramma si ha $\|u+v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2) - \|u-v\|^2$. Per cui, se $u-v \neq 0$ segue che $\|u+v\|^2 < 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$. Quindi, se $\|u\| \leq m$ e $\|v\| \leq m$ e $u \neq v$, allora $\|u+v\|^2 < 2(m^2+m^2) = 4m^2$. Ne segue $\|u+v\| < 2m$ e quindi la stretta convessità di $\mathcal{V}$. $\square$

Osservazione 55 Dalla legge del parallelogramma e dalla diseguaglianza triangolare segue la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$. Infatti, dalla diseguaglianza triangolare scritta nella forma $(\|u\|-\|v\|)^2 \leq \|u-v\|^2$ segue

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\cdot\|v\| \leq \|u-v\|^2$$

da cui, per la legge del parallelogramma, si ha

$$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) - \|u-v\|^2 \leq 2\|u\|\cdot\|v\|$$

cioè

$$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) \leq 2\|u\|\cdot\|v\|,$$

quindi $\langle u,v\rangle \leq \|u\|\cdot\|v\|$. $\square$

È utile la seguente definizione

Definizione 56 Sia $\mathcal{V}$ spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e siano $\varphi_i(x) \in \mathcal{V}$, per $i = 0, 1, \ldots$, tali che $\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle = 0$ per $i \neq j$. L'insieme ortogonale $\{\varphi_i \in \mathcal{V},\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$, è completo se non esistono $y \in \mathcal{V}$ tali che $\langle\varphi_i, y\rangle = 0$ per ogni i. Cioè non esiste un altro insieme ortogonale di cui l'insieme originale sia sottoinsieme proprio.

Ricordiamo il seguente risultato riguardante insiemi ortogonali completi in uno spazio di Hilbert.

Lemma 57 *Sia* $\{\varphi_i(x) \in \mathcal{H},\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$ *un insieme ortogonale completo nello spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$*. Allora l'insieme* $\mathcal{S} = \{f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in K\}$ *è denso in* $\mathcal{H}$*. Cioè per ogni* $f \in \mathcal{H}$ *e per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $g_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i \in \mathcal{S}$ *tale che* $\|f - g_n\| \leq \epsilon$*.*

5.3 Funzione di migliore approssimazione

Teorema 58 *Sia* $\mathcal{V}$ *spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e sia* $f \in \mathcal{V}$*. Siano inoltre* $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{V}$ *linearmente indipendenti. Allora* $\exists!\ g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i$ *tale che* $\|g - f\|$ *è minima. Inoltre* $\|g - f\|$ *è minima se e solo se* $\langle g - f, v\rangle = 0$ *per ogni* $v \in \mathcal{W} := span(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$*.*

Dim. L'esistenza e unicità di g segue dal fatto che $\mathcal{V}$ è strettamente convesso alla luce del teorema 46 e del corollario 54.

Sia $h = f - g$. Dimostriamo ora che $\|h\|$ è minima se e solo se il vettore h è ortogonale a $\mathcal{W} = \mathrm{span}(\varphi_0, \ldots \varphi_n)$, cioè $\langle h, v\rangle = 0$ per ogni $v \in \mathcal{W}$. Se $\|h\|$ è minimo, allora $\|h\|^2 \leq \|h + \gamma v\|$ per ogni γ e $v \in \mathcal{W}$, da cui

$$\|h\|^2 \leq \|h + \gamma v\|^2 = \langle h + \gamma v, h + \gamma v\rangle = \|h\|^2 + 2\gamma\,\langle h, v\rangle + \gamma^2\|v\|^2$$

cio'e $2\gamma\langle h, h\rangle + \gamma^2\|v\| \geq 0$ per ogni γ. Scelgo $\gamma = -\langle h, v\rangle / \langle v, v\rangle$ ed ho $-\langle h, v\rangle^2/\langle v, v\rangle \geq 0$, cioè $\langle h, v\rangle = 0$.

Viceversa, se $\langle h, v\rangle = 0$ per ogni $v \in \mathcal{W}$ allora $\|h+\gamma v\|^2 = \langle h+\gamma v, h+\gamma v\rangle = \langle h, h\rangle + \gamma^2\langle v, v\rangle \geq \|h\|^2$. $\square$

Il seguente risultato dà una espressione esplicita della soluzione di miglior approssimazione

Teorema 59 *Nell'ipotesi del teorema precedente la soluzione di miglior approssimazione* g *è :* $g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i$ *dove*

$$A \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

con $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} = \langle\varphi_i, \varphi_j\rangle$, $b_i = \langle f, \varphi_i\rangle$*.*

Dim. $f - g$ è ortogonale a $\mathcal{W} = \mathrm{span}(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$, cioè $\langle f - g, \varphi_j\rangle = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, n$ e questa è la j-esima equazione. $\square$

Corollario 60 *Se $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ sono ortogonali allora $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle / \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle$. Quindi*

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \varphi_i$$

I coefficienti $\frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}$ sono chiamati i *coefficienti di Fourier* di $f(x)$.

Teorema 61 *Sia $\{\varphi_i \in \mathcal{H},\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$ un insieme ortogonale nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Sia*

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \varphi_i$$

la funzione di miglior approssimazione di f, $r_n = f - g_n$ il resto e $\delta_n = \|r_n\|$ l'errore di approssimazione. Allora vale

$$\delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \tag{10}$$

per cui la successione δ_n è non crescente. inoltre la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi, \varphi \rangle}$ è convergente e

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \qquad \text{diseguaglianza di Bessel} \tag{11}$$

quindi la serie in (11) è convergente. Se inoltre l'insieme $\{\varphi_i \in \mathcal{H},\ i = 0, 1, 2, \ldots\}$ è anche completo vale

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} + \delta_n^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \qquad \text{uguaglianza di Parseval} \tag{12}$$

per cui la successione δ_n converge a zero in modo monotono.

Dim. Se g_n è di migliore approssimazione per f rispetto a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, allora $\delta_n^2 = \|f - g_n\|^2 = \langle f - g_n, f - g_n \rangle = \langle f - g_n, f \rangle$ essendo g_n ortogonale a $h = f - g_n$. Risulta allora che

$$\begin{aligned}
\delta_n^2 =& \|f\|^2 - \langle f, g_n \rangle \\
=& \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \varphi_i \right\rangle \\
=& \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \geq 0
\end{aligned}$$

cioè la (10). In particolare, per ogni n vale

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}.$$

Quindi la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}$ converge e vale

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}.$$

Dimostriamo ora che se $\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots\}$ è completo allora $\|f\|^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}$. Sia $\mathcal{S} = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i : \ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. Per il lemma 57 vale $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$. Quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\psi \in \mathcal{S}$ tale che $\|f - \psi\| \leq \epsilon$, $\psi = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i\varphi_i$. Per il teorema 58 esiste ed è unica la soluzione di migliore approssimazione $g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^*\varphi_i$ tale che $\|f-g\| \leq \|f-\psi\| \leq \epsilon$. Quindi

$$\epsilon \geq \|f-g\| \geq |\,\|f\| - \|g\|\,| \geq \|f\| - \|g\|$$

da cui

$$(\|f\| - \epsilon)^2 \leq \|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}$$

per ogni $\epsilon > 0$. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ha

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\langle f,\varphi_i\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}$$

che completa la dimostrazione. $\square$

Esempio: il prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ definisce lo spazio di Hilbert delle funzioni da $[a,b]$ in R per cui è finito l'integrale di Lebesgue $\int_a^b f(x)^2\omega(x)dx$, dove $\omega(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione a valori positivi.

Esempio: $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2,\ldots$, non è un sistema ortonormale in $L^2[0,1]$. Vale $\langle \varphi_i,\varphi_j\rangle = \int_0^1 x^{i+j}dx = 1/(i+j+1)$. La matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=0:n}$, $a_{i,j} = 1/(i+j+1)$ è detta matrice di Hilbert. Il suo numero di condizionamento cresce esponenzialmente con n.

Osservazione 62 La scelta $\varphi_i(x) = x^i$ oltre a non fornire un sistema ortonormale di funzioni, è particolarmente infelice poiché la matrice del sistema che fornisce la funzione di migliore approssimazione è fortemente mal condizionata per cui dal punto di vista numerico il problema della sua risoluzione diventa intrattabile già per valori moderati di n. Un'altro inconveniente è che nel passare da n a $n+1$ i calcoli svolti per risolvere il sistema $n \times n$ non possono essere utilizzati per facilitare la risoluzione del sistema $(n+1)\times(n+1)$. $\square$

Osservazione 63 Si osservi che se $\{\varphi_i\}$ è sistema ortogonale completo, dall'espressione

$$\delta_n^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle \varphi_i,f\rangle^2}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle}$$

segue che il valore di δ_n è calcolabile esplicitamente. Per cui, data una tolleranza ϵ, il calcolo dei coefficienti di Fourier può essere condotto per $n = 1, 2, 3, \ldots$, fintanto che $\delta_n < \epsilon$. Inoltre il passare da n a $n+1$ non comporta il dover risolvere un nuovo sistema lineare come nel caso di un sistema non ortogonale. $\square$

Osservazione 64 Purtroppo, con un sistema ortogonale completo dato da un prodotto scalare, la relazione $\|\delta_n\| \le \epsilon$ non implica che $|f(x) - g_n(x)| \le \epsilon$ per ogni x. Per avere verificata quest'ultima condizione bisogna adottare la norma infinito la quale non è indotta da nessun prodotto scalare.

In particolare $\|h\|_2 \le \epsilon$ non implica $\|h\|_\infty \le \epsilon$. Per questo basta scegliere $L^2([0,1])$ con $h(x) = x^n$ per cui $\|h\|_2^2 = 1/(2n+1)$, $\|h\|_\infty = 1$. $\square$

In generale la convergenza in L^2 non implica la convergenza in L^∞. Però sotto particolari condizioni sì. Vale infatti il seguente

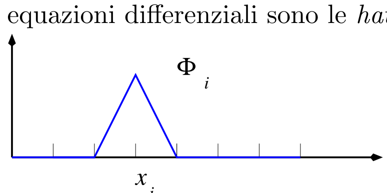
Teorema 65 *Per $n \ge 1$ sia $g_n(x)$ la funzione di migliore approssimazione di $f(x) \in C[-1,1]$ ottenuta scegliendo come φ_i i polinomi di Chebyshev di prima specie e col prodotto scalare ad essi associato. Se $f(x)$ è Lipschitziana allora $g_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, i.e., $\lim_n \|f(x) - g_n(x)\|_\infty = 0$. Se $f \in C^k[-1,1]$, $k \ge 1$, allora $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$: $\|f - g_n\|_\infty \le \gamma \frac{\log n}{n^k}$ e vale*

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i T_i(x).$$

La serie del teorema precedente è detta Serie di Chebyshev.

Osservazione 66 Dal punto di vista computazionale talvolta è conveniente scegliere delle funzioni $\varphi_i(x)$ che pur non essendo ortogonali verifichino la seguente proprietà: siano a supporto compatto e siano tali che $\mathrm{supp}(\varphi_i) \cap \mathrm{supp}(\varphi_j) = \emptyset$ se $|i - j| \ge k$ per un intero $k > 0$ ragionevolmente piccolo. In questo modo si verifica facilmente che la matrice A del sistema lineare che fornisce i coefficienti della migliore approssimazione è una matrice a banda con $2k + 1$ diagonali. Sistemi lineari con matrici a banda si risolvono in modo poco costoso con le metodologie dell'algebra lineare numerica.

Una possibile scelta a questo riguardo è quella di suddividere l'intervallo $[a, b]$ in intervalli equispaziati $x_i = a + ih$, $h = 1/(b - a)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, fissare una funzione $\varphi(x)$ che abbia supporto $[-h, h]$ e sia nulla al di fuori di esso e porre $\varphi_i(x) = \varphi(x - x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Funzioni usualmente utilizzate nel contesto delle equazioni differenziali sono le *hat functions*



ottenute con $\varphi(x) = \max(0, h - |x|)$. Per l'insieme delle funzioni hat col prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ la matrice A è tale che $A = (h^3/6)\mathrm{trid}(1, 4, 1)$, cioè è tridiagonale con elementi diagonali uguali a $4(h^3/6)$ e elementi sopra e sottodiagonali uguali a $h^3/6$. La matrice è fortemente dominante diagonale e ha numero di condizionamento indipendente dalla dimensione. Questo dà alla matrice proprietà computazionali rilevanti. $\square$

6 Alcune considerazioni sull'interpolazione

Finora abbiamo studiato metodi e proprietà di approssimazione di funzioni mediante polinomi. Su spazi di Hilbert con norme derivanti da un prodotto scalare abbiamo caratterizzato la migliore soluzione con resto di minima norma e descritto come calcolarla.

Abbiamo introdotto polinomi ortogonali che ben si prestano all'uopo. Per spazi di Banach, ad esempio $C[a, b]$ con la norma infinito la situazione è un po' più complicata. Ci sono comunque metodi per calcolare il polinomio di migliore approssimazione in norma infinito.

Abbiamo poi visto come usando polinomi di Chebyshev, e quindi il prodotto scalare associato, la serie di Fourier, ribattezzata serie di Chebyshev, converge uniformemente a $f(x)$ se f è lipschitziana o di classe $C^k[a, b]$. Per cui la serie di Chebyshev dà un buon approssimante in norma infinito anche se non ottimo.

Ci chiediamo ora cosa si può dire delle approssimazioni ottenute con polinomi di interpolazione.

Definizione 67 *Dato un intervallo* $[a, b]$ *definiamo* tavola dei nodi *su* $[a, b]$ *l'insieme* $\{x_i^{(n)} \in [a, b] : \quad i = 0, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_i^{(n)} \neq x_j^{(n)}, \quad \textit{se } i \neq j\}$.

Dati un intervallo $[a, b]$ e una tavola di nodi $x_i^{(n)} \in [a, b]$, $i = 0, \ldots, n$, e una $f \in C[a, b]$, definiamo $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i^{(n)})L_{i,n}(x)$, dove $L_{i,n}(x)$ sono i polinomi di Lagrange definiti da

$$L_{i,n}(x) = \prod_{j=0,n,\ j\neq i} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_j^{(n)}}.$$

Poiché $L_{i,n}(x_j^{(n)}) = \delta_{i,j}$, ne segue che $p_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$, cioè il polinomio $p_n(x)$ è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ relativo ai nodi $x_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Definisco l'operatore $\mathcal{A}_n : C[a, b] \to \mathcal{P}_n$ tale che $\mathcal{A}_n(f) = p_n$. Voglio studiare il condizionamento di $\mathcal{A}_n$

6.1 Costanti di Lebesgue e condizionamento dell'interpolazione

Denotiamo $f_i = f(x_i^{(n)})$ (tralasciando per semplicità la dipendenza da n). In questo modo il polinomio di interpolazione si scrive come $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_{i,n}(x)$.

Se perturbo i valori f_i in $\tilde{f}_i$ ho il polinomio $\tilde{p}_n(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{f}_i L_{i,n}(x)$. Per cui

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \le \sum_{i=0}^n |f_i - \tilde{f}_i| \cdot |L_{i,n}(x)| \le \max_i |f_i - \tilde{f}_i| \sum_{i=0}^n |L_{i,n}(x)|.$$

Pongo $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |L_{i,n}(x)|$ ed ho

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \le \Lambda_n \max_i |f_i - \tilde{f}_i|, \quad \forall\, x \in [a,b],$$

da cui

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \le \Lambda_n \|f - \tilde{f}\|_\infty. \tag{13}$$

Cioè la quantità Λ_n esprime la massima amplificazione che può avere $\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty$ sotto perturbazioni dei valori di f. Quindi esprime una maggiorazione del condizionamento numerico dell'operatore $\mathcal{A}_n$ che a $f(x)$ associa il polinomio di interpolazione in relazione alla tavola di nodi scelta.

La costante Λ_n è chiamata *costante di Lebesgue* e dipende unicamente dalla tavola di nodi di interpolazione. Ogni tavola di nodi di interpolazione ha quindi la sua corrispondente costante di Lebesgue.

Da (13) applicata con $g = f - \widetilde{f}$, segue $\Lambda_n \ge \frac{\max_x |\mathcal{A}_n(g(x))}{\max_x |g(x)|}$. Vale la seguente proprietà:

$$\Lambda_n = \max_{g\in C[a,b],\, \|g\|_\infty = 1} \|\mathcal{A}_n(g)\|_\infty =: \|\mathcal{A}_n\|_\infty$$

per dimostrarlo basta osservare che

$$\begin{aligned}
\sup_{g\in C[a,b]} \frac{\|\mathcal{A}_n(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} &= \sup_{g\in C[a,b]} \frac{\|\sum g(x_i^{(n)}) L_{i,n}(x)\|_\infty}{\|g\|_\infty} \\
&\le \frac{\max_i |g(x_i^{(n)})| \max_{x\in[a,b]} \sum_i |L_{i,n}(x)|}{\|g\|_\infty} \\
&\le \max_{x\in[a,b]} \sum_i |L_{i,n}(x)|.
\end{aligned}$$

Inoltre, se si sceglie g in modo che $\|g\|_\infty = 1$ e $g(x_i^{(n)}) = \pm 1$ a seconda del segno di $L_{i,n}(\xi)$, dove ξ è il punto in cui $\sum_i |L_{i,n}(x)|$ prende il valore massimo, si ottiene l'uguaglianza.

Teorema 68 *Sia $f \in C[a,b]$ e $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione relativo alla tavola di nodi $x_i^{(n)}$. Sia inoltre $q_n(x)$ il polinomio di migliore approssimazione uniforme. Allora vale*

$$\|f - p_n\|_\infty \le (1 + \Lambda_n)\|f - q_n\|_\infty.$$

Dim. Siano p_n il polinomio di interpolazione e q_n il polinomio di miglior approssimazione uniforme. Poiché $f - p_n = f - q_n + q_n - p_n$ si ha

$$\|f-p_n\|_\infty \le \|f-q_n\|_\infty + \|q_n-p_n\|_\infty = \|f-q_n\|_\infty + \|\mathcal{A}_n(q_n-f)\|_\infty \le (1+\Lambda_n)\|q_n-f\|_\infty$$

che completa la dimostrazione. $\square$

Osservazione 69 Se Λ_n è "piccola" allora l'errore dell'interpolazione è poco più grande di quello della migliore approssimazione uniforme. È quindi importante usare delle tavole di nodi che comportino costanti di Lebesgue Λ_n il più piccole possibile. $\square$

Si riportano i valori di Λ_n per alcune tavole di nodi su $[-1, 1]$

- Punti equispaziati: $\Lambda_n \approx 2^{n+1}/(en \log n)$
- Punti di Chebyshev $x_i^{(n)} = \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)})$, $i = 0, \ldots, n$:

$$\frac{2}{\pi} \log(n+1) + 0.96 \leq \Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \log(n+1) + 1.$$

I nodi$x_i^{(n)}$ sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev di prima specie.

Si osservi la enorme differenza nei due casi che sottolinea l'importanza dei nodi di Chebyshev. Per il teorema 68 l'interpolazione sui nodi di Cebyshev, anche se non fornisce la funzione di migliore approssimazione uniforme, dà un'approssimazione che può essere ragionevole data la crescita logaritmica della costante di Lebesgue associata Λ_n.

È noto che $\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \log(n+1) + 0.818$ per ogni scelta dei nodi ma non è nota la tavola dei nodi che dà il valore minimo di Λ_n. Maggiori informazioni sulle costanti di Lebesgue si trovano in [3].

Un risultato negativo relativo all'interpolazione è il seguente teorema di Faber:

Teorema 70 (Faber) *Non esiste nessuna tavola di nodi su $[a, b]$ tale che per ogni $f \in C[a, b]$ il polinomio di interpolazione relativo a questa tavola di nodi converga uniformemente a f.*

Per dimostrare questo risultato bisogna richiamare il teorema di Banach-Steinhaus

Teorema 71 (Banach-Steinhaus) *X spazio di Banach, Y spazio normato, $\mathcal{F} = \{\mathcal{A} : X \to Y,\ \mathcal{A}$ lineare e continuo$\}$, $\|\mathcal{A}\| = \sup \frac{\|\mathcal{A}(x)\|}{\|x\|}$. Se per ogni $x \in X$ è $\sup_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \|\mathcal{A}(x)\| < +\infty$ allora $\sup_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \|\mathcal{A}\| < +\infty$.*

La dimostrazione del teorema di Faber procede allora nel seguente modo: se per assurdo esiste una tavola dei nodi tale che $\mathcal{A}_n(f)$ converge uniformemente a f per ogni $f \in C[a, b]$, allora $\forall f \in C[a, b]$ è $\lim_n \|\mathcal{A}_n(f) - f\|_\infty = 0$, cioè $\|\mathcal{A}_n(f) - f\|_\infty$ è limitata per ogni n. Si applica allora il teorema di Banach-Steinhaus a $\{\mathcal{A}_n - 1\}$ e si ha che $\|\mathcal{A} - 1\|$ è limitata per ogni n ma $\|\mathcal{A}_n - 1\| \geq \|\mathcal{A}_n\| - 1 \geq \Lambda_n - 1 \geq \frac{2}{\pi} \log n - 1$, che è assurdo. $\square$

7 Osservazioni su "continuo e discreto"

Osservazione 72 Nel caso discreto il problema di approssimare un vettore $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$ con un vettore $\boldsymbol{g} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ dove $\mathcal{S}$ è il sottospazio generato dalle colonne della matrice A di dimensioni $n \times m$, $m < n$ è

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}} \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}\|$$

dove $\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2}$. Se A ha rango massimo, cioè le sue colonne formano una base di $\mathcal{S}$ un approccio risolutivo è quello di usare le *equazioni normali*

$$\langle A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{c} - \boldsymbol{f} \rangle = 0$$

che nel prodotto euclideo diventano

$$A^T(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}) = 0.$$

Esse impongono l'ortogonalità del residuo rispetto alle colonne di A, cioè l'ortogonalità del residuo rispetto allo spazio $\mathcal{S}$ esattamente come accadeva nel caso continuo.

Un altro approccio numericamente più stabile nel discreto consiste nel calcolare la fattorizzazione QR della matrice A: $A = QR$, dove Q ha colonne ortogonali e R è triangolare superiore, e poi risolvere

$$\min \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}\| = \min \|QR\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}\| = \min \|Q(R\boldsymbol{x} - Q^T\boldsymbol{f})\| = \min \|R\boldsymbol{x} - Q^T\boldsymbol{f}\|$$

che fornisce $y_i = (Q^T\boldsymbol{f})_i$, $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Nel continuo, questo corrisponde a costruirsi prima una base ortogonale di $\mathcal{S}$ e a calcolarsi i coefficienti di Fourier. □

Osservazione 73 In Octave il grafico della funzione $f(x)$ su $[a, b]$ può essere tracciato calcolando i vettori $\boldsymbol{f} = (f_i)$, $f_i = f(x_i)$ per $x_i = a + hi$, $i = 0, \ldots, n$ con $h = (b - a)/n$ e tracciando la spezzata che unisce i punti (x_i, f_i) con (x_{i+1}, f_{i+1}).

Il prodotto scalare tra $f(x)$ e $g(x)$ può essere stimato approssimando l'integrale $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ con $h \sum_i f_i g_i$, cioè $h \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = h\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{g}$.

La norma di $f(x)$ viene quindi approssimata da $(\frac{b-a}{n} \sum_i f_i^2)^{1/2}$. Quindi la discretizzazione del problema continuo conduce ad un problema discreto come descritto nell'osservazione precedente □

Osservazione 74 Scegliendo la base dei monomi $\varphi_i(x) = x^i$ e campionando ciascun polinomio $\varphi_i(x)$ nei nodi x_i scelti si ottiene la matrice di Vandermonde. Nel discreto la matrice di Hilbert $\langle x^i, x^j \rangle$ è approssimata dal prodotto tra la matrice di Vandermonde e la sua trasposta. □

Come potrebbe essere definita nel continuo l'analogo di una matrice di Householder?

Osservazione 75 Se $Ax = b$ è sistema lineare con A matrice definita positiva, allora il funzionale $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ ha gradiente $\nabla\varphi(x) = Ax - b$ che si annulla se e solo se x è soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Inoltre l'hessiano di $\varphi(x)$ coincide con la matrice A che è definita positiva. Quindi il funzionale φ è convesso e il suo unico punto di minimo è la soluzione del sistema lineare $Ax = b$.

Questo fatto permette di interpretare la soluzione di un sistema lineare definito positivo come punto di minimo di un funzionale e quindi permette di costruire dei metodi di risoluzione iterativi così detti del gradiente, quali i metodi della discesa più ripida e del gradiente coniugato. Tali metodi generano una successione di punti x_k in cui il funzionale assume valori decrescenti e tale che $\lim_k \varphi(x_k) = 0$. Proprietà analoghe valgono per operatori differenziali lineari "definiti positivi". Vedremo ciò nella seconda parte.

La minimizzazione del funzionale $\varphi(x)$ può essere vista come un problema di minima norma. Infatti, introduciamo il prodotto scalare $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ (è prodotto scalare data la definita positività di A) e la norma conseguente $\|x\|_A := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Questa norma è chiamata *norma in energia*. Denotata con u la soluzione del sistema $Ax = b$ risulta allora

$$\begin{aligned}\|x - u\|_A^2 =& \langle x - u, x - u\rangle = x^T Ax - 2x^T Au + u^T Au \\ =& x^T Ax - 2x^T b + u^T b = 2\varphi(x) + u^T b\end{aligned}$$

Cioè minimizzare il funzionale $\varphi(x)$ su un sottospazio $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$ equivale a trovare il vettore di $\mathcal{V}$ che è più vicino alla soluzione del sistema $Ax = b$ in norma in energia. □

8 Il teorema di Korovkin

In questa sezione[1] si presenta il Teorema di Korovkin la cui estrema potenza risiede nella semplicità delle ipotesi, nella loro facile verificabilità e nella notevole forza della tesi. In particolare, data una successione di operatori da $C(K)$ in sé, K compatto di $\mathbb{R}^n$, basta verificare che tali operatori siano lineari e positivi e che siano convergenti per un numero finito di semplici funzioni continue (alcuni polinomi di grado al più due) per concludere che la data successione di operatori è in grado di approssimare ogni funzione continua. Non ultimo pregio del Teorema di Korovkin è la estrema essenzialità della sua dimostrazione che si basa su conoscenze elementari di analisi matematica.

Per meglio definire il quadro in cui ci muoviamo, si riporta la definizione di operatore lineare e positivo (LPO).

Un operatore L è detto *operatore lineare positivo* (LPO) se:

1. È lineare, cioè $L[\lambda f] = \lambda L[f]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), e $L[f+g] = L[f]+L[g]$

[1] scritta da Federico Poloni

2. È *positivo*, cioè $L[f](x) \geq 0$ per ogni funzione f tale che $f(x) \geq 0$ per ogni x. Cioè L manda funzioni non negative su tutto il dominio in funzioni non negative su tutto il dominio.

Notate che le due ipotesi implicano che se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x nel dominio, allora

$$L[f](x) \leq L[g](x) \quad \text{per ogni } x \text{ nel dominio} \tag{14}$$

e che

$$|L[f]| \leq L[|f|]. \tag{15}$$

Sia L_n una successione di operatori. Diciamo che L_n *approssima bene* una funzione f (in una certa norma $\|\cdot\|$) se $\|L_n[f] - f\| \to 0$ per $n \to \infty$.

Teorema 76 (Teorema di Korovkin, versione 1-dimensionale) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un compatto, e sia $C(K)$ lo spazio delle funzioni continue da K a $\mathbb{R}$ con la norma del sup (convergenza uniforme). Sia $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di LPO su $C(K)$. Se L_n approssima bene le tre funzioni:*

- $x \mapsto 1$ *(la funzione costante uguale a 1),*
- $x \mapsto x$ *(l'identità),*
- $x \mapsto x^2$ *(la funzione "elevare al quadrato"),*

allora L_n approssima bene tutte le funzioni di $C(K)$.

Dim. Siano $f \in C(K)$, e $\varepsilon > 0$ fissati; dobbiamo mostrare che esiste $\tilde{n}$ tale che per ogni $n \geq \tilde{n}$ valga

$$|L_n[f](y) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in K.$$

Notiamo anche che al posto di ε al membro di destra possiamo mettere anche un'espressione del tipo $\gamma\varepsilon$, a patto che $\gamma > 0$ non dipenda né da n né da a.

Chiamiamo inoltre $M := \|f\|_{\infty}$, $N := \max_{x \in K} |x|$, e δ è tale che $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (che esiste perché una funzione continua su un compatto è uniformemente continua).

Innanzitutto sfruttiamo l'ipotesi: definiamo per ogni n, y

$$\begin{aligned}
\epsilon_0^{(n)}(y) :=& L_n[x \mapsto 1](y) - 1, \\
\epsilon_1^{(n)}(y) :=& L_n[x \mapsto x](y) - y, \\
\epsilon_2^{(n)}(y) :=& L_n[x \mapsto x^2](y) - y^2.
\end{aligned}$$

Per l'ipotesi, possiamo prendere $\tilde{n}$ sufficientemente grande, in modo che per $n \geq \tilde{n}$ si abbia $\left\|\epsilon_i^{(n)}\right\|_{\infty} < \min(\varepsilon, \varepsilon\delta^2)$ per $i = 0, 1, 2$.

Ora, fissiamo $y \in K$ e per ogni $n \geq \tilde{n}$ scriviamo la stima

$$\begin{aligned}
|L_n[f](y) - f(y)| \leq& |L_n[f](y) - f(y)L_n[1](y)| + |f(y)L_n[1](y) - f(y)| \\
=& |L_n[f(x) - f(y)](y)| + \left|\epsilon_0^{(n)}(y)f(y)\right| \\
\leq& L_n[|f(x) - f(y)|](y) + M\varepsilon
\end{aligned}$$

(abbiamo usato la (15) nell'ultimo passaggio). Lavoriamo separatamente ora sul primo dei due addendi; si ha

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| \leq & \begin{cases} \varepsilon & \text{per } |x-y| \leq \delta \\ 2M & \text{per } |x-y| > \delta \end{cases} \\
\leq & \begin{cases} \varepsilon & \text{per } |x-y| \leq \delta \\ \frac{2M}{\delta^2}(x-y)^2 & \text{per } |x-a| > \delta \end{cases} \\
\leq & \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(x-y)^2
\end{aligned}
$$

quindi per la (14) e la (15), abbiamo

$$
\begin{aligned}
L_n[|f(x)-f(y)|](y) \leq & L_n[\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(x-y)^2] \\
= & \varepsilon L_n[1](y) + \frac{2M}{\delta^2}\left(y^2 L_n[1](y) + L_n[x^2](y) - 2y L_n[x](y)\right) \\
= & \varepsilon(1+\epsilon_0^{(n)}(y)) + \frac{2M}{\delta^2}\left(y^2(1+\epsilon_0^{(n)}(y)) + (y^2+\epsilon_1^{(n)}(y)) - 2y(y+\epsilon_2^{(n)}(y)\right) \\
= & \varepsilon(1+\epsilon_0^{(n)}(y)) + \frac{2M}{\delta^2}(y^2\epsilon_0^{(n)}(y) + \epsilon_1^{(n)}(y) - 2y\epsilon_2^{(n)}(y))
\end{aligned}
$$

Ora, poiché abbiamo scelto $\tilde{n}$ in modo che per $n \geq \tilde{n}$ le quantità $\epsilon_i^{(n)}(y)$ siano in modulo minori di $\delta^2\varepsilon$ si ha

$$L_n[|f(x)-f(y)|](y) \leq \gamma\varepsilon$$

con $\gamma > 0$ che dipende solo dalle scelte di K e f. Quindi il teorema è dimostrato. □

Notate che nelle stime compaiono quantità che dipendono da f: quindi la successione di LPO approssima bene tutte le funzioni, ma su alcune funzioni l'approssimazione converge più lentamente che su altre.

Cosa si può dire sulla velocità di convergenza? Se $\left\|\epsilon_i^{(n)}\right\|_\infty = O(h(n))$ per $i = 0, 1, 2$, allora $\|f - L_n[f]\|_\infty = O(h(n))$ per ogni f (però occhio che la costante nascosta nella notazione $O(\cdot)$ dipende da f). Quindi se per esempio una successione di LPO converge linearmente, quadraticamente, ... sulle tre funzioni di test, allora converge con lo stesso ordine per tutte le funzioni. Osservate che nella dimostrazione abbiamo richiesto che per $n > \tilde{n}$ valga $|\epsilon_i^{(n)}| \leq \varepsilon/\delta^2$ dove δ è tale che $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. La "piccolezza" di δ rispetto a ϵ ha un ruolo negativo sulla convergenza. Più piccolo è δ e maggiore è il valore di $\tilde{n}$ oltre il quale vale la maggiorazione dell'errore $|L_n[f(x)](y) - f(y)| \leq \gamma\varepsilon$.

Osserviamo ancora che avremmo potuto maggiorare $|f(x)-f(y)|$ con $\varepsilon + \frac{2M}{\delta}|x-y|$, rimuovendo il δ^2 al denominatore. Però in questo caso non avremmo potuto esprimere $|x-y|$ come combinazione lineare dei polinomi $1, x, x^2$. Questo fatto è essenziale per arrivare alla maggiorazione richiesta.

8.1 Generalizzazioni

Teorema 77 (Teorema di Korovkin, versione m-dimensionale) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un compatto, e sia $C(K)$ lo spazio delle funzioni continue da K a $\mathbb{R}$ con la norma del sup (convergenza uniforme). Sia $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di LPO su $C(K)$. Se L_n approssima bene le tre funzioni:*

- *$x \mapsto 1$ (la funzione costante uguale a 1),*
- *$x \mapsto x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (la proiezione sulla i-esima componente)*
- *$x \mapsto x_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (la funzione "elevare al quadrato"),*

allora L_n approssima bene tutte le funzioni di $C(K)$.

Vale una versione del teorema di Korovkin per funzioni di variabile reale a valori complessi. In questo caso la monotonia dell'operatore va intesa ristretta a funzioni che prendono valori reali, cioè se f è tale che $f(x) \in \mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ allora $L[f]$ è una funzione a valori reali tale che $L[f](y) \geq 0$. Per linearità la monotonia si applica anche alla parte reale e alla parte immaginaria della funzione. Ad esempio, se $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, dove $i^2 = -1$, con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funzioni reali non negative, posto $g(y) = L[f(x)](y) = g_1(y) + ig_2(y)$, con $g_1(y), g_2(y)$ funzioni reali, allora la monotonia di L implica che anche $g_1(y)$ e $g_2(y)$ sono non negative.

Teorema 78 (Teorema di Korovkin, versione complessa) *Sia $\mathcal{B} = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, f(0) = f(2\pi)\}$ (funzioni complesse continue e 2π-periodiche), con la norma del sup (convergenza uniforme). Sia $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di LPO su $\mathcal{B}$. Se L_n approssima bene le tre funzioni:*

- *$x \mapsto 1$,*
- *$x \mapsto e^{ix}$,*
- *$x \mapsto e^{-ix}$,*

allora L_n approssima bene tutte le funzioni di $\mathcal{B}$.

Rispetto alla versione 1D, cambia solo l'insieme delle funzioni su cui richiediamo la convergenza tra le ipotesi (il cosiddetto *test di Korovkin*).

8.2 Polinomi di Bernstein

I *polinomi di Bernstein* sono la successione di LPO su $K = [0, 1]$ definita da

$$B_n[f](x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Si verifichi per esercizio che i polinomi di Bernstein sono LPO.

8.3 Un'applicazione: dimostrazione del teorema di approssimazione di Weierstrass

Ci servirà nel seguito questo lemmetto con i binomiali.

Lemma 79 (formule "in-and-out" per i binomiali) *Valgono le seguenti identità.*

1. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
2. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}$

Dim. Applica le definizioni... □

Teorema 80 (di approssimazione di Weierstrass, caso 1D) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un compatto, e $f \in C(K)$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p = p_{f,\varepsilon}$ tale che*

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dim. Ci basta provare il teorema per $K = [0, 1]$, poi con qualche semplice trasformazione del dominio possiamo estenderlo a tutti gli altri compatti (come?).

Mostreremo che

$$\|f - B_n[f]\|_\infty \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{16}$$

Quindi basta prendere $p = B_n[f]$ per un n sufficientemente grande. La (16) è la tesi del teorema di Korovkin per i B_n, quindi ci basta dimostrare che sono soddisfatte le ipotesi, cioè che $\|f - B_n[f]\|_\infty \to 0$ per le tre funzioni di test $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$

- Per $x \mapsto 1$:

$$B_n[1](y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = (y + (1-y))^n = 1,$$

  quindi l'errore è costantemente uguale a 0.

- Per $x \mapsto x$:

$$\begin{aligned} B_n[x](y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} y^k (1-y)^{n-k} \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} y^{h+1} (1-y)^{n-1-h} = y(1 + (1-y))^{n-1} = y \end{aligned}$$

(abbiamo usato la in-and-out formula e cambiato indice $h := k - 1$) quindi di nuovo l'errore è sempre nullo.

- Per $x \mapsto x^2$: usiamo l'identità

$$\frac{k^2}{n}^2 = \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{k}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)},$$

le in-and-out formulas, e il risultato del punto precedente:

$$\begin{aligned}
B_n[x^2](y) =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \frac{k^2}{n^2} \\
=& \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \frac{k}{n} \right) \\
&+ \frac{n-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \right) \\
=& \frac{1}{n} y + \frac{n-1}{n} \left(\sum_{h=0}^{n-2} \binom{n-2}{h} y^{h+2} (1-y)^{n-2-h} \right) \\
=& \frac{1}{n} y + \frac{n-1}{n} y^2 = y^2 - \frac{1}{n} y^2 + \frac{1}{n} y
\end{aligned}$$

(stavolta abbiamo fatto il cambio di variabile $h := k - 2$). Quindi $B_n[x \mapsto x^2]$ converge uniformemente a $x \mapsto x^2$ (come ci serviva per provare che valgono le ipotesi del teorema di Korovkin), anche se stavolta c'è un errore di $O(\frac{1}{n})$. Del resto non potevamo aspettarci che l'errore fosse zero anche stavolta: difatti, se nella dimostrazione del teorema di Korovkin si ha $\epsilon_i^n = 0$ per ogni $n \ldots$

Quindi i polinomi di Bernstein soddisfano il teorema di Korovkin, e in particolare ci forniscono l'approssimazione che cercavamo sopra. $\square$

8.4 Caso multidimensionale

Il teorema di Weierstrass funziona pari pari in dimensione maggiore:

Teorema 81 (di approssimazione di Weierstrass) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un compatto, e $f \in C(K)$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p = p_{f,\varepsilon}$ tale che*

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dim. Se $K = [0,1]^m$, funziona lo stesso trucco di sopra. Definiamo i *polinomi di Bernstein m-dimensionali* come

$$B_n^{(m)}[f](y_1, \dots, y_n) :=$$
$$\sum_{\substack{k_1 = 1, \dots, n \\ k_2 = 1, \dots, n \\ \vdots \\ k_m = 1, \dots n}} \binom{n}{k_1} y_1^{k_1} (1-y_1)^{n-k_1} \binom{n}{k_2} y_2^{k_2} (1-y_2)^{n-k_2} \dots \binom{n}{k_m} y_m^{k_m} (1-y_m)^{n-k_m} f\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_m}{n}\right)$$

Con un po' di lavoro si riesce a provare che sono un LPO (facile) e che soddisfano le ipotesi del teorema di Korovkin (non è difficile come sembra: si riutilizzano diverse volte i calcoli fatti per il caso 1D ...), quindi concludiamo come sopra.

Stavolta però non è banale estendere il risultato da $K = [0,1]^m$ a un qualunque altro compatto. È facile estenderlo con un cambio di variabile a qualunque "cubo" $[-t, t]^m$, ma per passare a un compatto qualsiasi ora serve usare anche questo risultato (con $H = [-t, t]^m$ un cubo "sufficientemente grande"):

Teorema 82 (caso $\mathbb{R}^m$ del teorema di estensione di Tietze) *Sia $H \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto, $K \subseteq H$ compatto in H, $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ che estende f.*

Il risultato è un caso particolare di un teorema più generale di topologia; non conosco una dimostrazione rapida e indolore di questo teorema nel caso $\mathbb{R}^m$ che serve a noi[2]. □

[2]Quando l'ho chiesto a un paio di analisti mi hanno assicurato che "ma sì, si dovrebbe fare con un po' di lavoro, considerando il modulo di continuità di f su K, che è uniformemente continua, estendendola localmente e usando la compattezza..."

Esercizi

Esercizio 1 Sia N intero positivo e $a_i < b_i \le a_{i+1} < b_{i+1}$, per $i = 1, \ldots, N-1$ numeri reali, $\omega(x)$ funzione definita su $\cup_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ a valori positivi tale che $\int_{a_i}^{b_i} f(x)\omega(x)dx$ sia finito per $i = 1, \ldots, N$ e per ogni polinomio $f(x)$. Si verificichi che $\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} p(x)q(x)\omega(x)dx$ è un prodotto scalare, e si definiscano $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$, i polinomi ortogonali (normalizzati secondo un qualsiasi criterio) rispetto a questo prodotto scalare. Dimostrare che

a) i polinomi soddisfano una relazione a tre termini;

b) gli zeri di $p_n(x)$ sono tutti reali e distinti, gli intervalli (b_i, a_{i+1}) contengono al più uno zero, i rimaneni zeri appartengono all'insieme $\cup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$;

b1) esiste un $\hat{N}$ tale che se $n > \hat{N}$ ogni intervallo (a_i, b_i) contiene almeno uno zero di $p_n(x)$;

b2) in generale non è vero che se $n \ge N$ allora ogni intervallo contiene almeno uno zero di p_n;

c) vale la formula di Christoffel-Darboux e la proprietà di ortogonalità discreta $\sum_{k=1}^{n+1} p_i(x_k)p_j(x_k)w_k = 0$ per $i \ne j$ dove x_k sono gli zeri di $p_{n+1}(x)$, e w_k delle opportune costanti positive;

d) il grado di precisione della formula di integrazione approssimata di Gauss sull'insieme $\cup_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ è $2n+1$.

e) dire se è vero che per $n \ge N$ ogni intervallo contiene almeno uno zero di p_n.

Esercizio 2 Sia $T_n = (t_{ij})$ la matrice tridiagonale $n \times n$ definita da $t_{ii} = 10$, per $i = 1, \ldots, n$, e $t_{i,i+1} = t_{i+1,i} = -1$, per $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Posto $p_0 = 1$ e $p_k(x) = \det(x\, I_k - T_k)$, per $k = 1, \ldots, n$, dove I_k è la matrice identica di ordine k, dire se i polinomi $p_k(x)$ sono ortogonali rispetto a qualche prodotto scalare su qualche intervallo $[a, b]$.

b) In caso di risposta affermativa, determinare l'intervallo $[a, b]$ e il prodotto scalare.

Esercizio 3 Siano $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, polinomi ortogonali sull'intervallo $[-1, 1]$ rispetto al prodotto scalare

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)\,dx, \quad \text{dove} \quad \omega(x) = (x^2-1)^2,$$

e dove $\varphi_i(x)$ ha grado i.

a) Si esprimano i $\varphi_i(x)$ mediante la formula di Rodrigues.

b) Si calcolino i primi $\varphi_i(x)$.

c) Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a $n+2$ che si annullano in 1 e in -1. Si descriva, mediante i $\varphi_i(x)$, una base dello spazio $\mathcal{V}$ costituita da polinomi ortogonali su $[-1,1]$ rispetto al prodotto scalare

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

per lo spazio $\mathcal{V}$.

Esercizio 4 Sia $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, un insieme di polinomi ortogonali normalizzati in modo che $\varphi_i(x)$ sia monico e tale che il grado di $\varphi_i(x)$ sia i. Per $i = 1, 2, \dots, n$ si consideri la funzione razionale $f_i(x) = \varphi_i(x)/\varphi_{i-1}(x)$.

a) Si dimostri che $f_{i+1}(x) = x + B_i - C_i/f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ per opportune costanti B_i e C_i.

b) Si usi questa proprietà per dimostrare che gli zeri di $\varphi_i(x)$ separano quelli di $\varphi_{i+1}(x)$.

Esercizio 5 Vogliamo estendere la teoria dei polinomi ortogonali a polinomi che hanno coefficienti matriciali e definiamo $\mathcal{P}_n = \{P(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i A_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{m\times m}\}$. In questo modo, $P(x)$ è una combinazione lineare con coefficienti A_i dei polinomi elementari $x^i I_m$. $P(x)$ ha grado n se $A_n \neq 0$, è monico se $A_n = I_m$.

Per fare questo introduciamo inoltre un "prodotto scalare" a valori matriciali mediante l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{m\times m}$ definita da

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^T\, dx,$$

dove $W(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ è tale che $W(x)$ è continua, simmetrica e definita positiva per ogni $x \in [a, b]$, dove l'integrale di una matrice di elementi $a_{i,j}(x)$ è la matrice i cui elementi sono $\int_a^b a_{i,j}(x)dx$.

Si dimostri preliminarmente che per ogni $P, Q, R \in \mathcal{P}_n$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ vale

a) $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle^T$;

b) $V = \langle P, P \rangle$ è matrice simmetrica semidefinita positiva, inoltre V è definita positiva se $\det P(x) \not\equiv 0$, infine $V = 0$ se e solo se $P = 0$;

c) $\langle AP, Q \rangle = A\langle P, Q \rangle$, $\langle P, AQ \rangle = \langle P, Q \rangle A^T$, $\langle xP, Q \rangle = \langle P, xQ \rangle$;

d) $\langle P + R, Q \rangle = \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle$, $\quad \langle P, Q + R \rangle = \langle P, Q \rangle + \langle P, R \rangle$.

Definiamo $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}_n$ una *sequenza di polinomi ortogonali* se P_i ha grado i, è monico, e vale $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$. Si dimostri che

e) Se esiste una sequenza di polinomi ortogonali P_j, $j = 0, \dots, n$ allora $\langle P_j, P_j \rangle$ è definita positiva;

f) in $\mathcal{P}_n$ esiste ed è unica una sequenza P_i, $i = 0, \ldots, n$ di polinomi ortogonali e ogni altro polinomio $Q \in \mathcal{P}_n$ può essere scritto come $\sum_{i=0}^{n} A_i P_i$ per $A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$;

g) P_i è ortogonale ad ogni polinomio di grado minore di i;

h) i polinomi $P_i(x)$ soddisfano una relazione a tre termini del tipo

$$P_{j+1}(x) = (x\, I_m - B_j)P_j(x) - C_j P_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$P_0 = I, \quad P_1 = x\, I_m - \int_a^b xW(x)\, dx \left(\int_a^b W(x)\, dx \right)^{-1}$$

con $B_j, C_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

i)
$$P_k(x) = x^k\, I_m - [\mu_k, \ldots \mu_{2k-1}] A_{k-1}^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ x\, I_m \\ \vdots \\ x^{k-1}\, I_m \end{bmatrix},$$

dove i momenti $\mu_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sono definiti da $\mu_k = \int_a^b x^k W(x) dx$ ed A_{k-1} è la matrice a blocchi in cui il blocco di posto (i, j) è μ_{i+j-2}, $i, j = 1, \ldots, k$.

j) Vale un analogo della formula di Christoffel-Darboux?

Esercizio 6 Si vuole estendere il concetto di famiglia di polinomi ortogonali a polinomi di due variabili $p(x, y) = \sum_{i=0}^{h} \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} x^i y^j$ con coefficienti reali $a_{i,j}$. Per questo si definisce *grado* di $p(x, y)$ il valore $\max\{i + j : \ a_{i,j} \neq 0\}$ e si indica con Π_n l'insieme dei polinomi in due variabili di grado al più n e con Π l'insieme di tutti i polinomi in due variabili.

Dato un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si definisce $p(x, y) \in \Pi_n$ *polinomio ortogonale di grado* n se $p(x, y)$ ha grado n e $\langle p(x, y), q(x, y) \rangle = 0$ per ogni polinomio $q(x, y) \in \Pi_{n-1}$. Si definisce poi $\mathcal{V}_n$ lo spazio dei polinomi ortogonali di grado n.

Infine, fissati due reali a, b tali che $a < b$, si introduce una funzione $W(x, y)$ definita e continua su $(a, b) \times (a, b)$, a valori reali positivi, tale che esiste finito $\int_a^b \int_a^b W(x, y) p(x, y) dx\, dy$ per ogni polinomio $p(x, y) \in \Pi$.

a) Si dimostri che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p(x, y), q(x, y) \rangle = \int_a^b \int_a^b p(x, y) q(x, y) W(x, y) dx\, dy$$

è un prodotto scalare.

b) Si descriva un procedimento per generare basi ortogonali di $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ e si dimostri che $\dim \mathcal{V}_k = k + 1$.

c) Si verifichi che l'unione delle basi ortogonali di $\mathcal{V}_k$, $k = 0, \ldots, n$, costituisce una base di polinomi ortogonali di Π_n, e che, diversamente dal caso dei polinomi nella sola x, tale base non è unica (a meno di multipli scalari). Gli spazi $\mathcal{V}_k$, $k = 0, \ldots, n$ sono univocamente determinati?

d) Si verifichi che se $v_i^{(n)}$ per $i = 1, \dots, n+1$ è una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$ tale che $\langle v_i^{(n)}, v_i^{(n)} \rangle$ è indipendente da i, allora $u^{(n)} = (u_i^{(n)})_{i=1,\dots,n+1} := Qv^{(n)}$ è tale che $u_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, n+1$ è base ortogonale di $\mathcal{V}_n$ per ogni matrice ortogonale Q di dimensione $n+1$.

e) Si dimostri che se $p(x,y) \in \mathcal{V}_n$ allora i polinomi $xp(x,y)$ e $yp(x,y)$ sono ortogonali a tutti i polinomi di grado al più $n-2$ e a tutti i polinomi ortogonali di grado almeno $n+2$.

f) Si deduca che vale un analogo della relazione ricorrente a tre termini nel senso che per ogni $p(x,y) \in \mathcal{V}_n$, sia $xp(x,y)$ che $yp(x,y)$ si scrivono come combinazioni lineare di tre polinomi in $\mathcal{V}_{n-1}, \mathcal{V}_n$ e $\mathcal{V}_{n+1}$.

g) Denotando con $v^{(k)}$ un vettore di $k+1$ componenti tale che $v_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, k+1$ è una base di $\mathcal{V}_k$, si dimostri che esistono e sono uniche matrici A_n, $(n+1) \times (n+2)$, B_n $(n+1) \times (n+1)$ e C_n $(n+1) \times n$ tali che

$$xv^{(n)} = A_n v^{(n+1)} + B_n v^{(n)} + C_n v^{(n-1)}$$

con $v^{(-1)} = 0$, $C_{-1} = 0$. Similmente vale una proprietà analoga per $yv^{(n)}$.

h) Si dimostri che se $\varphi_n(x)$ sono polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare $< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ dato dal peso $\omega(x) : (a.b) \to \mathbb{R}^+$, allora $q_{m,n}(x,y) = \varphi_m(x)\varphi_n(y)$ è un insieme di polinomi in due variabili ortogonali rispetto al peso $W(x,y) = \omega(x)\omega(y)$ e $q_{n,k-n}(x,y)$ per $k = 0, \dots, n$ costituisce una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$.

Esercizio 7 Siano $p_0(x), \dots, p_{n+1}(x)$ polinomi ortogonali sull'intervallo $[a,b]$ rispetto al prodotto scalare $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx$, con $w(x)$ funzione peso positiva su $[a,b]$, e $p_j(x) = \sum_{i=0}^{j} p_{i,j}x^i$. Siano $x_0, \dots, x_n$ gli zeri di $p_{n+1}(x)$. Si definiscano le matrici $(n+1) \times (n+1)$, dove gli indici scorrono da 0 a n: $A = (a_{i,j})$, $V = (v_{i,j})$, $S = (s_{i,j})$ tali che $a_{i,j} = p_j(x_i)$, $v_{i,j} = x_i^j$, $s_{i,j} = p_{i,j}$ per $i \le j$, $s_{i,j} = 0$ altrove.

a) Si verifichi che $A = VS$.

b) Si dimostri che esistono matrici diagonali D_1 e D_2 con elementi diagonali positivi tali che $Q = D_1 A D_2$ è ortogonale.

c) Si dimostri che Q è il fattore ortogonale della fattorizzazione QR della matrice $D_1 V$, cioè $D_1 V = QR$ dove $R = D_2^{-1} S^{-1}$. Si ricavi un algoritmo per il calcolo dei coefficienti di $p_i(x)$, $i = 0, \dots, n$.

Esercizio 8 Sia $\mathcal{P}_n$ lo spazio dei polinomi $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ di grado al più n con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $p_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ una successione di polinomi ortogonali tali che deg$p_i(x) = i$.

a) Si dimostri che la successione soddisfa una relazione a tre termini del tipo $p_{i+1}(x) = (a_i x + b_i)p_i(x) - c_i p_{i-1}(x)$, $c_i > 0$, se e solo se il prodotto scalare è tale che $\langle xp(x), q(x)\rangle = \langle p(x), xq(x)\rangle$ per ogni coppia di polinomi in $\mathcal{P}_n$ di grado al più $n-1$.

b) Si dimostri che per ogni prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathcal{P}_n$ esiste una matrice simmetrica definita positiva H di dimensione $n+1$ tale che $\langle p(x), q(x)\rangle = \boldsymbol{p}^T H \boldsymbol{q}$ dove $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ sono i vettori $(n+1)$-dimensionali dei coefficienti dei polinomi $p(x)$ e $q(x)$ nella base dei monomi. Inoltre, data una matrice simmetrica definita positiva H di dimensione $n+1$ si dimostri che l'applicazione che associa alla coppia $(p(x), q(x))$ il numero reale $p^T H q$ è un prodotto scalare.

c) Si dica come è fatta la matrice nel caso in cui i polinomi ortogonali relativi al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soddisfano una relazione ricorrente a tre termini.

d) Siano ξ_i, $i = 0, \ldots, n$ numeri reali distinti. Si verifichi che $\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{i=0}^{n} p(\xi_i)q(\xi_i)$ è un prodotto scalare e che i polinomi ortogonali relativi a tale prodotto verificano una relazione a tre termini.

Esercizio 9 Si supponga che esista un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathcal{P}$ tale che

$$\langle x^2 f(x), g(x)\rangle = \langle f(x), x^2 g(x)\rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{P} \tag{17}$$

e non necessariamente sia $\langle xf(x), g(x)\rangle = \langle f(x), xg(x)\rangle$.

a) Si dimostri che i polinomi ortogonali $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$, tali che $\deg(p_i(x)) = i$, ottenuti con questo prodotto scalare verificano una relazione di ricorrenza del tipo $p_{i+1}(x) = (a_i x^2 + b_i)p_{i-1}(x) + c_i p_i(x) + d_i p_{i-2}(x) + e_i p_{i-3}(x)$, per opportune costanti a_i, b_i, c_i, d_i.

b) Si dica se la matrice dei momenti, intesa come $H_n = (h_{i,j})$, $h_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, mantiene ancora la struttura di Hankel. Si verifichi che permutando righe e colonne di H_n con la permutazione $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ si ottiene una matrice 2×2 a blocchi formata da 4 blocchi di Hankel e che ogni matrice di questo tipo, definita positiva, determina un prodotto scalare su $\mathcal{P}_n$ che gode della proprietà (1). Si dia un esempio di prodotto scalare su $\mathcal{P}_n$, definito tramite la matrice H_n, con la proprietà (1).

c) Sia $H_n(x)$ la matrice ottenuta sostituendo l'ultima riga di H_n con $[1, x, x^2, \ldots, x^n]$. Dire, motivando adeguatamente la risposta, se $p_n(x) = \det H_n(x)$.

d) Si decomponga $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ come $p(x) = p_+(x^2) + xp_-(x^2)$ dove $p_+(x^2) = (p(x) + p(-x))/2$ e $p_-(x^2) = (p(x) - p(-x))/(2x)$ sono la parte pari e la parte dispari di $p(x)$. Si consideri il prodotto scalare su $[a, b]$ dato da $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_a^b w(x)p(x)q(x)dx$, associato al peso $w(x)$ e si definisca

$$\langle p(x), q(x)\rangle' := \langle p_+(x), q_+(x)\rangle + \langle p_-(x), q_-(x)\rangle$$

Si verifichi che $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ è un prodotto scalare tale che $\langle x^2 f(x), g(x)\rangle = \langle f(x), x^2 g(x)\rangle$ ed esistono polinomi $p(x), q(x)$ tali che $\langle xp(x), q(x)\rangle \neq \langle p(x), xq(x)\rangle$.

e) Si possono esprimere i polinomi ortogonali di cui al punto a) come determinanti di opportune matrici a banda? Come è fatta la matrice dei momenti del prodotto scalare del punto c)? Si analizzino le proprietà dei polinomi $p_n(x)$ ottenuti col prodotto scalare dato nel punto c).

Esercizio 10 Siano $p_0(x), \ldots, p_n(x), \ldots \in \mathcal{P}$ polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx$, dove $a < b$ e $\omega(x)$ è una funzione peso. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti

1. I sottospazi di polinomi $\mathcal{P}^+ = \{q(x^2),\ q(x) \in \mathcal{P}\}$ e $\mathcal{P}^-\{xq(x^2),\ q(x) \in \mathcal{P}\}$ sono ortogonali.
2. Vale $p_1(x) = A_1 x$, $p_{i+1}(x) = xA_{i+1}p_i(x) - C_i p_{i-1}(x)$, per $i = 1, 2, \ldots$, dove $A_i, C_i \neq 0$.
3. Esistono polinomi $\varphi_i(x)$ e $\psi_i(x)$ di grado i tali che $p_{2i}(x) = \varphi_i(x^2)$, $p_{2i+1}(x) = x\psi_i(x^2)$.

Sotto le condizioni dei punti precedenti dimostrare che $ab < 0$ e che i polinomi $\varphi_i(x)$ sono ortogonali rispetto ad un opportuno prodotto scalare sull'intervallo $[\hat{a}, \hat{b}]$ con peso $\hat{\omega}$. Si determinino $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\omega}$. Dimostrare analoga proprietà per $\psi_i(x)$.

Mettere in relazione i coefficienti della relazione a tre termini dei polinomi $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ con quelli dei polinomi $p_i(x)$.

Dire come è fatta la matrice dei momenti per il prodotto scalare per cui valgono le proprietà 1,2,3.

È possibile che con il prodotto scalare che rende ortogonali i polinomi $\varphi_i(x)$ i sottospazi $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$ siano ortogonali? È possibile che ciò valga per il prodotto scalare che rende ortogonali i $\psi_i(x)$?

Dire se la condizione

4. $b = -a$ e $\omega(x) = \omega(-x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

è equivalente alle condizioni 1-3.

Esercizio 11 Sia $n > 2$ un intero, $h = 1/n$ e si definiscano i punti $x_i = ih$, $i = -1, \ldots, n+1$. Per $i = 0, \ldots, n$ si definiscano le funzioni "hat" da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{h}|x - x_i| & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \cap [0,1], \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si consideri l'operatore di interpolazione L_n che a $f(x) \in C[0,1]$ associa la funzione continua $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$ tale che $g_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

a) Dimostrare che le funzioni $\varphi_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ sono linearmente indipendenti.

b) Dimostrare che l'operatore L_n è ben definito e dare una formula per il calcolo degli a_i, confrontare il costo della formula ottenuta con quello del calcolo della funzione di migliore approssimazione in norma 2.

c) Dimostrare che l'operatore L_n è lineare e positivo.

d) Dimostrare che per ogni $f(x) \in C([0,1])$ vale $\lim_n \|g_n(x) - f(x)\|_\infty = 0$.

e) Valutare l'ordine con cui l'errore di approssimazione $\|g_n(x) - f(x)\|_\infty$ converge a zero.

Esercizio 12 Sia $n > 0$ un intero, $h = 1/n$, $x_i = ih$, per $i = 0, \dots, n$. Si considerino le funzioni $\varphi_i(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 & \text{se } x \ge x_i \end{cases}$$

per $i = 0, 1, \dots, n$. Sia $C[0,1]$ lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ e si definisca l'operatore $\mathcal{L}_n$ che ad $f(x) \in C[0,1]$ associa la funzione $g_n(x) = \mathcal{L}_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ tale che $g_n(x_i) = f(x_i)$.

1. Si esplicitino i coefficienti α_i di $\mathcal{L}_n$.
2. Si dimostri che $g_n(x)$ approssima bene le funzioni 1, x con errore nullo e la funzione x^2 con errore $O(h^2)$ e quindi approssima bene ogni $f(x) \in C[0,1]$. Dire se per ogni $f \in C$ esiste una costante γ tale che $\|g_n(x) - f(x)\|_\infty \le \gamma h^2$.
3. Se $f(x) \in C^2[0,1]$ si dimostri la diseguaglianza del punto 2 e si metta in relazione γ con la derivata seconda di $f(x)$.
4. Si imposti il problema del calcolo della funzione di miglior approssimazione in norma 2 dove $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
5. Si valuti il costo computazionale del calcolo della funzione di migliore approssimazione

Esercizio 13 Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sia $n > 0$ intero e $\mathcal{V}_n$ spazio lineare generato da $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$.

a) Siano $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ di elementi $a_{i,j} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, e $Q = (q_{i,j})$, tale che $A = QDQ^T$, con $Q^T Q = I$ e D matrice diagonale. Si dimostri che $\psi_j = \sum_{i=1}^n q_{i,j}\, \varphi_i$, $j = 1, \dots, n$, è una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$.

b) Sia $\mathcal{H}$ lo spazio lineare delle funzioni da $[0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}$ periodiche a quadrato integrabile col prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{-}^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$. Dato un intero n, si definiscano $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n+1$, con $h = 2\pi/(n+1)$. Sia $\mathcal{V}_n$ lo spazio lineare generato dalle funzioni

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{h}} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}), \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \qquad \text{per } i = 1, \dots, n. \tag{18}$$

Si formuli il problema della migliore approssimazione di una funzione $f \in \mathcal{H}$ con una funzione $g_n \in \mathcal{V}_n$. In particolare si studi la complessità di calcolo e il condizionamento in norma 2 del sistema lineare associato.

c) Si determini una base ortogonale dello spazio $\mathcal{V}_n$ del punto b).

d) Supponendo che $f(x)$ sia la funzione identicamente uguale a 1, si dia una valutazione di $\|f - g_n^*\|_2$ e $\|f - g_n^*\|_\infty$, dove g_n^* è la funzione di migliore approssimazione nello spazio $\mathcal{V}_n$ del punto (b) e

$$\|f\|_2 = (\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|.$$

e) Si tratti il punto b) e il punto d) per lo spazio $\mathcal{V}_{n+1}$ generato dalle funzioni $\varphi_i(x)$ in (18) e dalla funzione $\varphi_{n+1}(x)$ che vale $1/\sqrt{h}$ per $x \in [x_0, x_1) \cup [x_n, x_{n+1}]$ e 0 altrove.

Esercizio 14 Sia $\psi(x) = (x^k - 1)^k$ per k intero pari, e si definisca $\varphi(x) = \psi(x)$ per $-1 \le x \le 1$, $\varphi(x) = 0$ altrove. Si verifichi che φ è di classe $C^k - 1$. Dato un intero n si ponga $h = \frac{1}{n+1}$, $x_i = ih$, per $i = -(n+1), \ldots, (n+1)$, $\varphi_i(x) = \varphi((x - x_i)/h)$, per $i = -n, \ldots, n$.

Oppure $\varphi(x) = 1 - 2x^2$ su $[-1/2, 1/2]$, $x^2 - 3x + 7/4$ su $[1/2, 3/2]$, $(x+1)^2 - 3(x+1) + 7/4$ su $[-3/2, -1/2]$.

Oppure $(x^2 - 1)^k$ (come cambia la dominanza diag in funzione di k?) Dare il migliore k che dà la convergenza su $(1, x, x^2)$ migliore.

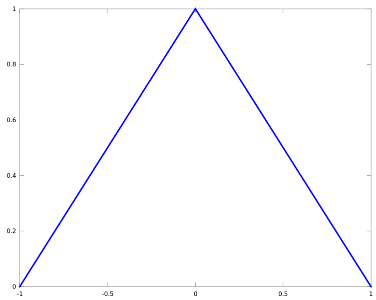
Si consideri l'operatore $L_n : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ tale che $L_n[f] = \sum_{i=-n}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$.
a) Si dimostri che L_n è lineare e positivo.
b) Si dica se $\lim_n \|L_n[f] - f\|_\infty = 0$ per ogni $f \in C[-1, 1]$
c) Si dica come si può calcolare la funzione g_n che minimizza $\delta_n = \int_{-1}^{1}(f(x) - g_n(x))^2 dx$ dove $g(x)$ varia nello spazio generato da $\varphi_i(x)$, $i = -n, \ldots, n$, valutando gli aspetti computazionali (costo, condizionamento stabilità).
d) Dire se $\lim_n \delta_n = 0$

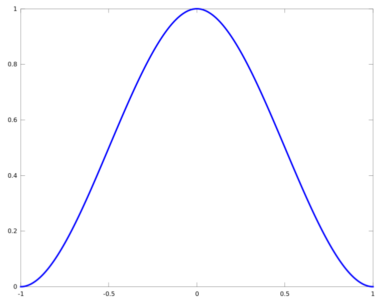
Esercizio 15 Sia $\varphi(t)$ funzione continua e non negativa, nulla al di fuori di $[-1, 1]$, tale che $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = \varphi(-t)$. Sia n intero positivo, $h = 1/(n+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$. Si definisca $L_n[f] : C[0, 1] \to C[0, 1]$ l'operatore che associa alla funzione $f \in C[0, 1]$ la funzione $g_n(x) = L_n[f]$ data da $\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)\varphi_i(x)$, dove $\varphi_i(x) = \varphi((x - x_i)/h)$.

a) Si dimostri che L_n è un operatore lineare positivo.

b) Si dimostri che se $\varphi(t) + \varphi(1-t) = 1$ per $t \in [0, 1]$ allora $\lim_{n\to\infty} \|L_n[f] - f\|_\infty = 0$ per ogni funzione $f(x) \in C[0, 1]$. La condizione $\varphi(t) + \varphi(1-t) = 1$ è necessaria per la convergenza?

c) Quale dei seguenti due casi fornisce la migliore convergenza? $\varphi(t) = 1 - t$ per $0 \le t \le 1$, $\varphi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$ per $0 \le t \le 1$.





d) Valutare il costo computazionale e il numero di condizionamento nel calcolo della funzione $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(x)$ di migliore approssimazione in norma L^2 nei casi del punto c).

e) Dire se è possibile migliorare la convergenza scegliendo come $\varphi(t)$ su $[0, 1]$ un polinomio di grado più alto. Dire se è possibile migliorare la convergenza scegliendo come $\varphi(t)$ una funzione con supporto più ampio.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, *Metodi Numerici per l'Algebra Lineare.* Zanichelli, Bologna, 1987.

[2] R. Bevilacqua, D. Bini, M. Capovani e O. Menchi, Metodi numerici, Zanichelli, Bologna 1992.

[3] Simon J. Smith, Lebesgue constants in polynomial interpolation, Annales Mathematicae et Informaticae, v. 33 (2006) pp. 109-123. `www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami`

[4] J. Stoer, R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Third Edition, Springer, 2002.

[5] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Second Edition, Tata McGraw-Hill, 1974.

Appendice A: Risoluzione di alcuni esercizi

Rioluzione dell'esercizio 1.
Si tratta di ripetere le dimostrazioni viste a lezione adattandole al caso in esame. Osserviamo che l'espressione definita di $\langle p,q\rangle$ soddisfa le proprietà del prodotto scalare essendo bilineare, simmetrica e tale che $\langle p,p\rangle = 0$ se e solo se $\sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} p^2(x)\omega(x)dx = 0$. Essendo quest'ultima una somma di quantità non negative può essere nulla se e solo se ciascuna di esse è nulla e quindi se e solo se $p(x)$ è nullo su tutti gli intervalli $[a_i,b_i]$. Questo accade se e solo se $p(x)$ è identicamente nullo. Inoltre per la definizione data vale $\langle xp(x),q(x)\rangle = \langle p(x),xq(x)\rangle$. I polinomi $p_0(x),p_1(x)\ldots,p_n(x)$, che si ottengono ortogonalizzando $1,x,x^2,\ldots,x^n$ col procedimento di Gram-Schmidt, sono ortogonali e tali che grado$(p_i(x)) = i$.

a) La proprietà del prodotto scalare $\langle xp(x),q(x)\rangle = \langle p(x),xq(x)\rangle$ è sufficiente, indipendentemente dalla natura del prodotto scalare, a dimostrare la validità della relazione a tre termini. Infatti, i polinomi $p_i(x)$, per $i = 0,\ldots,n$, avendo grado $0,1,\ldots,n$, sono linearmente indipendenti quindi costituiscono una base di $\mathcal{P}_n$. Quindi se $q(x)$ è un polinomio di grado $m < n$ si può scrivere come $q(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i p_i(x)$ per $\alpha_i \in \mathbb{R}$, per cui $\langle p_n,q\rangle = 0$. Questo ci permette di dimostrare la relazione a 3 termini. Infatti essendo $p_0,\ldots,p_n$ base di $\mathcal{P}_n$ si può scrivere

$$p_{n+1} = \beta_n x p_n + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i.$$

Moltiplicando scalarmente per p_j e usando l'ortogonalità e il fatto che $\langle xp(x),q(x)\rangle = \langle p(x),xq(x)\rangle$ segue la relazione a tre termini.

b) Gli zeri sono tutti reali come si può dedurre dal fatto che essi sono autovalori di una matrice tridiagonale irriducibile e simmetrica. Tale matrice si ottiene simmetrizzando la matrice che definisce la relazione a tre termini dato il fatto che gli elementi sopra- e sotto-diagonali hanno lo stesso segno. Inoltre gli zeri hanno molteplicità 1 poichè la matrice tridiagonale di cui questi zeri sono autovalori ha rango almeno $n-1$.

La proprietà che tutti gli zeri siano in $\mathcal{I} = \cup_{i=1}^N (a_i,b_i)$ è falsa in generale come dimostra questo controesempio. Siano $a_1 < b_1 < 0$ e $b_2 = -a_1$, $a_2 = -b_1$, $\omega(x) = 1$. In questo caso $p_1(x) = x$ è ortogonale a $p_0(x) = 1$, inoltre $p_1(x)$ si annulla in 0 che non appartiene al dominio. In particolare, per questo prodotto scalare, i polinomi di grado pari presentano solo potenze pari di x e quelli di grado dispari presentano solo potenze dispari di x. Quindi tutti i polinomi di grado dispari si annullano in 0.

In effetti la dimostrazione fatta nel caso standard per dimostrare che tutti gli zeri stanno in (a,b) non funziona in questo caso più generale. Infatti, pur essendo vero che il polinomio che si costruisce moltiplicando $p_n(x)$ per i fattori di grado dispari relativi agli zeri interni al dominio non cambia segno in ciascun intervallo, può accadere che questo segno sia diverso da intervallo ad intervallo. Ciò non garantisce che la somma degli integrali sia non nulla. Il cambio di segno ci può essere se nella parte compresa tra due intervalli consecutivi c'e' un numero dispari di zeri di $p_n(x)$, come accade nel controesempio mostrato.

La dimostrazione del caso standard può essere adattata per dimostrare che nella parte compresa tra due intervalli contigui $p_n(x)$ ha al massimo uno zero e che i rimanenti zeri stanno in $\mathcal{I} = \cup_{i=1}^N (a_i, b_i)$. Dimostriamo questo fatto. Supponiamo che in qualche intervallo $[b_i, a_{i+1}]$ il polinomio $p(n)$ abbia più di uno zero. Allora costruisco un polinomio $q(x)$ che ha per zeri tutti gli zeri di $p_n(x)$ negli intervalli (a_i, b_i) e gli zeri e uno zero di $p_n(x)$ nell'intervallo $[b_i, a_{i+1}]$ nel caso in cui $p_n(x)$ dovesse avere un numero dispari, maggiore di 1, di zeri in $[b_i, a_{i+1}]$. È evidente che se assumiamo l'esistenza di 2 o più zeri in un intervallo $[b_i, a_{i+1}]$, il polinomio $q(x)$ ha grado minore di n. Per cui deve essere ortogonale a $p_n(x)$. Questo implica che $q(x)p_n(x)$ non cambia segno in ciascun intervallo (a_i, b_i) e che se $q(x)p_n(x)$ dovesse annullarsi in $[b_i, a_{i+1}]$, si annulla un numero pari di volte. Quindi il segno di $q(x)p_n(x)$ è lo stesso in tutti gli intervalli (a_i, b_i) e $\sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} q(x)p_n(x)\omega(x)dx$ non può essere nullo.

c) La dimostrazione della formula di Christoffel-Darboux si basa unicamente sulla relazione ricorrente a tre termini che nel nostro caso è soddisfatta; la proprietà di ortogonalità discreta si ottiene direttamente dalla formula di Christoffel-Darboux;

d) Siano $x_1, \ldots, x_{n+1}$ gli zeri di $p_{n+1}(x)$, per cui per la formula di ortogonalità discreta possiamo scrivere

$$\langle q(x), s(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} q(x_k)s(x_k)w_k$$

per ogni q, s polinomi di grado al più n. Allora, dato un polinomio $B(x)$ di grado al più $2n+1$, possiamo scrivere $B(x) = p_{n+1}(x)q(x) + r(x)$ dove $q(x)$ è il quoziente e $r(x)$ è il resto della divisione di $B(x)$ per p_{n+1}, in particolare, $r(x)$ ha grado al più n e $q(x)$ è tale che $B(x_i) = r(x_i)$, per $i = 1, \ldots, 2n+1$. Vale allora $\sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} B(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} p_{n+1}(x)q(x)\omega(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} r(x)\omega(x)dx$. Il primo addendo si lascia scrivere come $\langle p_{n+1}, q \rangle$, per cui il prodotto scalare è zero essendo p_{n+1} ortogonale a $q(x)$ che ha grado al più n. Inoltre, poiché il grado di $r(x)$ è minore di $n+1$, il secondo addendo si può scrivere come $\langle r, 1 \rangle$ per cui può essere scritto come $\sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} r(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^{2n+1} r(x_k)w_k = \sum_{k=1}^{2n+1} B(x_k)w_k$. Per cui la formula integra esattamente polinomi di grado al più $2n+1$ quindi il suo grado di precisione è $2n+1$.

b1) La proprietà 1 è vera. Infatti se per assurdo ci fosse un intervallo (a_k, b_k) che non è ricoperto da zeri di polinomi ortogonali, scegliendo $f(x)$ continua su $\mathcal{I}$, positiva su (a_k, b_k) e nulla altrove, allora approssimando $\int_{\mathcal{I}} f(x)\omega(x)dx$ con una formula di integrazione Gaussiana, si otterrebbe valore nullo qualunque sia il grado n, mentre l'integrale di $f(x)$ sarebbe non nullo. Questo dà un assurdo poiché la funzione $f(x)$ sul compatto $\mathcal{I}$ può essere approssimata da un polinomio con precisione arbitraria.

b2) La proprietà è falsa. Come controesempio basta osservare che per $N = 2$, e $b_1 = a_2$, il prodotto scalare in esame coincide col prodotto scalare standard su $[a_1, b_2]$. Per cui se $x_1 < x_2$ sono gli zeri di $p_2(x)$ basta scegliere $b_1 = a_2$ non appartenenti a $[x_1, x_2]$ per avere l'assurdo.

Risoluzione dell'esercizio 2.

a) È

$$x\, I_k - T_k = \begin{bmatrix} x-10 & 1 & & & \\ 1 & x-10 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & x-10 \end{bmatrix}.$$

Per $k = 1$ è $\det\big(x\, I_1 - T_1\big) = x - 10$. Applicando la regola di Laplace all'ultima riga si ha per $k \geq 2$

$$\det\big(x\, I_k - T_k\big) = (x-10)\det\big(x\, I_{k-1} - T_{k-1}\big) - \det\big(x\, I_{k-2} - T_{k-2}\big).$$

Quindi i polinomi $p_k(x)$ soddisfano la seguente relazione a tre termini

$$p_k(x) = (x-10)\, p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x), \quad \text{con} \quad p_0 = 1, \quad p_1(x) = x - 10.$$

e si ha

$$p_2(x) = (x-10)^2 - 1, \quad p_3(x) = (x-10)^3 - 2(x-10), \quad \ldots$$

b) Per vedere se questi polinomi sono ortogonali rispetto al prodotto scalare

$$< p_i, p_k >= \int_a^b \omega(x)\, p_i(x)\, p_k(x)\, dx$$

per un'opportuna funzione peso $\omega(x)$ e un opportuno intervallo $[a, b]$, si nota che facendo il cambiamento di variabile $2\, y = x - 10$ e ponendo $p_k(2y + 10) =: u_k(y)$, la relazione a tre termini diventa

$$u_k(y) = 2y\, u_{k-1}(y) - u_{k-2}(y), \quad \text{con} \quad u_0 = 1, \quad u_1(y) = 2y.$$

I polinomi così definiti sono i polinomi di Chebyshev di seconda specie ortogonali sull'intervallo $[-1, 1]$, cioè $u_k(y) = U_k(y)$. Si ha quindi $a = 8$, $b = 12$, $\omega(x) = (1 - ((10-x)/2)^2)^{1/2}$ e $p_k(x) = U_k((x-10)/2)$.

Risoluzione dell'esercizio 3.

a) I $\varphi_i(x)$ sono i polinomi ultrasferici relativi alla costante $\alpha = 2$. Per il teorema 21, posto $s_i(x) = (x^2 - 1)^{i+2}$, si ha

$$\frac{d^i}{dx^i}\frac{s_i(x)}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\Gamma(i+3)^2}{\Gamma(j+3)\Gamma(i-j+3)}\, (1-x)^{i-j}(1+x)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{(i+2)!^2}{(j+2)!(i-j+2)!}\, (1-x)^{i-j}(1+x)^j. \tag{19}$$

I polinomi ultrasferici corrispondenti sono

$$\varphi_i(x) = \beta_i \, \frac{d^i}{dx^i} \frac{s_i(x)}{\omega(x)} \, ,$$

dove le β_i sono costanti. Per fissare dei valori convenienti delle β_i si impone la condizione che $\varphi_i(1) = 1$. Per $x = 1$ nella sommatoria (19) tutti i termini si annullano eccetto quello per $j = i$, quindi

$$\varphi_i(1) = \beta_i \binom{i}{i} \frac{(i+2)!^2}{(i+2)!\,2!}\, 2^i = \beta_i \,(i+2)!\, 2^{i-1}, \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{1}{2^{i-1}\,(i+2)!}.$$

b) I primi due polinomi di calcolano direttamente

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x.$$

Per calcolare i polinomi successivi, conviene determinare prima la relazione a tre termini, che sarà della forma

$$\varphi_{i+1}(x) = xA_{i+1}\varphi_i(x) - C_i\varphi_{i-1}(x),$$

in quanto $B_{i+1} = 0$ per i polinomi ultrasferici. Imponendo la condizione che $\varphi_i(1) = 1$ per ogni i si ha

$$A_{i+1} - C_i = 1.$$

Inoltre è

$$C_i = A_{i+1}\,\frac{a_{i-1}}{a_i}\,\frac{h_i}{h_{i-1}}, \quad \text{dove} \quad h_i = (-1)^i a_i\,\beta_i\, i! \int_{-1}^{1} s_i(x)\,dx.$$

Quindi

$$C_i = -A_{i+1}\,\frac{i}{2(i+2)}\;\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} s_i(x)\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} s_{i-1}(x)\,dx}\,.$$

Dalla relazione

$$\frac{d}{dx}\big((x^2-1)^{i+2}x\big) = (2i+4)(x^2-1)^{i+1} + (2i+5)(x^2-1)^{i+2}$$

si ricava

$$\Big[(x^2-1)^{i+2}x\Big]_{-1}^{1} = (2i+4)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{i+1}\,dx + (2i+5)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{i+2}\,dx,$$

cioè

$$(2i+4)\int_{-1}^{1} s_{i-1}(x)\,dx + (2i+5)\int_{-1}^{1} s_i(x)\,dx = 0,$$

quindi

$$C_i = A_{i+1}\,\frac{i}{2(i+2)}\,\frac{2i+4}{2i+5} = A_{i+1}\,\frac{i}{2i+5}.$$

Allora

$$A_{i+1} = \frac{2i+5}{i+5} \quad \text{e} \quad C_i = \frac{i}{i+5}.$$

La relazione a tre termini risulta

$$(i+5)\,\varphi_{i+1}(x) = (2i+5)\,x\,\varphi_i(x) - i\,\varphi_{i-1}(x).$$

Quindi i primi polinomi ortogonali sono

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = \frac{7x^2-1}{6}, \quad \varphi_3(x) = \frac{3x^3-x}{2}.$$

c) I polinomi di grado minore o uguale a $i+2$ che si annullano in 1 e in -1 possono essere scritti nella forma

$$p_{i+2}(x) = (x^2-1)\,q_i(x),$$

dove $q_i(x)$ è un opportuno polinomio di grado i. Quindi il prodotto scalare definito su $\mathcal{V}$ risulta

$$< p_i(x), p_j(x) >= \int_{-1}^{1} p_i(x)\,p_j(x)\;dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2 q_{i-2}(x)\,q_{j-2}(x)\;dx.$$

Ne segue che i $\varphi_i(x)$ visti sopra costituiscono una base ortogonale per $\mathcal{V}$.

Risoluzione dell'esercizio 4.

a) È $\varphi_0(x) \equiv 1$, quindi $f_1(x) = \varphi_1(x)$. Dalla relazione a tre termini per i polinomi monici $\varphi_i(x)$

$$\varphi_{i+1}(x) = (x+B_i)\varphi_i(x) - C_i\varphi_{i-1}(x), \quad i \ge 1,$$

in cui $C_i =< \varphi_i(x), \varphi_i(x) > / < \varphi_{i-1}(x), \varphi_{i-1}(x) >$ è strettamente maggiore di 0, si ricava che

$$f_{i+1}(x) = (x+B_i) - C_i/f_i(x), \quad i \ge 1,$$

quindi le costanti richieste sono proprio quelle che valgono per la ricorrenza dei $\varphi_i(x)$.

b) Da questa relazione risulta evidente che se $f_{i+1}(x)$ si annulla in x_j, non è possibile che anche $f_i(x)$ si annulli nello stesso punto. Poiché

$$f'_{i+1}(x) = 1 + C_i f'_i(x)/f_i^2(x), \quad \text{con} \quad f'_1(x) = 1,$$

risulta che per $i \ge 1$ è $f'_{i+1}(x) > 0$ in ogni intervallo (α_j, β_j) in cui $f_{i+1}(x)$ è definita. La $f_{i+1}(x)$ ha gli stessi zeri della $\varphi_{i+1}(x)$, cioè ne ha esattamente $i+1$. Siano $x_1, \ldots, x_i$ gli zeri di $\varphi_i(x)$, che dalla teoria sappiamo essere tutti reali e distinti. Quindi nei sottointervalli $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_{i-1})$, $(x_i, +\infty)$ la

$f_{i+1}(x)$ è crescente, quindi si annulla in ciascuno dei sottointervalli. Ne segue che gli zeri della $\varphi_i(x)$ separano gli zeri della $f_{i+1}(x)$ e quindi della $\varphi_{i+1}(x)$.

Risoluzione dell'esercizio 5.

a) Poiché $W(x)$ è simmetrica si ha

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^T\, dx = \Big(\int_a^b Q(x)W(x)P(x)^T\, dx\Big)^T = \langle Q, P\rangle^T.$$

b) La simmetria segue dal punto a). Sia poi $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Allora

$$\boldsymbol{v}^T V \boldsymbol{v} = \int_a^b \boldsymbol{v}^T\, P(x)W(x)P(x)^T\, \boldsymbol{v}\, dx = \int_a^b \boldsymbol{y}(x)^T\, W(x)\, \boldsymbol{y}(x)\, dx,$$

dove $\boldsymbol{y}(x) = P(x)^T\, \boldsymbol{v}$. Per ogni $x \in [a, b]$ la matrice $W(x)$ è definita positiva, quindi $\boldsymbol{y}(x)^T\, W(x)\, \boldsymbol{y}(x) \geq 0$. Ne segue che $\boldsymbol{v}^T V \boldsymbol{v} \geq 0$. Inoltre, se $\det P(x) \not\equiv 0$ è $\boldsymbol{y}(x) \neq \boldsymbol{0}$ per ogni x e quindi $\boldsymbol{v}^T V \boldsymbol{v} > 0$. L'ipotesi può essere alleggerita, richiedendo che $\det P(x) \neq 0$ al di fuori di un insieme di misura nulla, grazie alla continuità della forma quadratica $P(x)W(x)P(x)^T$.

Inoltre, se $P(x) = O$ per ogni $x \in [a, b]$ è $V = \int_a^b 0\, dx = O$. Viceversa, se $V = O$ è $\int_a^b P(x)W(x)P(x)^T\, dx = O$. Poiché $W(x)$ è definita positiva per ogni $x \in [a, b]$ per cui $P(x) \neq O$, è $P(x)W(x)P(x)^T > 0$. Dalla continuità della forma quadratica $P(x)W(x)P(x)^T$ segue che l'integrale può venire nullo solo se $P(x) = O$ per ogni x.

c) Per $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ è

$$\langle AP, Q\rangle = \int_a^b AP(x)W(x)Q(x)^T\, dx = A \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^T\, dx = A\langle P, Q\rangle.$$

Le altre relazioni si dimostrano in modo analogo.

d) Seguono dalla linearità degli operatori.

e) $P_j(x)$ è una matrice di ordine m i cui elementi sono polinomi di grado minore od uguale ad n, e in particolare gli elementi principali hanno grado n. Quindi $\det P_j(x)$ è un polinomio di grado $m \cdot n$ che si può annullare in al più $m \cdot n$ punti. Per la (b) è $V > 0$.

e) (alternativo) È $P_0(x) = I_m$, quindi $\langle P_0, P_0\rangle = \int_a^b W(x)\, dx > 0$ in quanto $W(x)$ è definita positiva (il suo determinante è > 0). Per $j > 0$ è $P_j(x) = x^j I_m + p_{j-1}(x)$, dove $p_{j-1}(x)$ può essere scritto come combinazione lineare dei $P_i(x)$ per $i = 1, \ldots, j-1$, cioè $p_{j-1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{j-1} H_i P_i(x)$. Per la linearità del prodotto scalare e l'ortogonalità dei $P_i(x)$ è

$$\langle P_j, P_j\rangle = \langle x^j I_m, P_j\rangle + \sum_{i=0}^{j-1} H_i \langle P_i, P_j\rangle = \langle x^j I_m, P_j\rangle,$$

e poiché $\langle xP, Q\rangle = \langle P, xQ\rangle$ risulta $\langle P_j, P_j\rangle = \langle I_m, x^j P_j\rangle = \langle P_0, x^j P_j\rangle$. Adesso scriviamo il polinomio monico $x^j P_j(x)$ di grado $2j$ come combinazione dei $P_i(x)$

per $i = 0, \dots, 2j$. Ne segue che $\langle P_j, P_j \rangle = \langle P_0, AP_0 \rangle$ per una opportuna A che non dipende da x, quindi $\langle P_j, P_j \rangle = \int_a^b W(x) A^T \, dx$. Ma $\langle P_j, P_j \rangle \neq O$ perché $P_j(x) \not\equiv 0$. Inoltre $\langle P_j, P_j \rangle$ deve essere una matrice simmetrica semidefinita positiva, quindi A deve essere una matrice scalare con diagonale positiva. Perciò $\langle P_j, P_j \rangle$ risulta definita positiva.

f) Si applica il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla sequenza di polinomi $x^j I_m$, $j \geq 0$, definendo $P_0(x) = I_m$ e per $j = 1, \dots, n$

$$P_j(x) = x^j I_m - \sum_{i=0}^{j-1} \langle x^j I_m, P_i \rangle \langle P_i, P_i \rangle^{-1} P_i(x). \tag{20}$$

Per induzione si dimostra che il polinomio $P_j(x)$ così ottenuto è monico di grado j, infatti la sommatoria non altera $x^j I_m$. Inoltre se $k < j$ per linearità è

$$\langle P_j, P_k \rangle = \langle x^j I_m, P_k \rangle - \sum_{i=0}^{j-1} \langle x^j I_m, P_i \rangle \langle P_i, P_i \rangle^{-1} \langle P_i, P_k \rangle,$$

in cui per $i,\ k \leq j-1$ è $\langle P_i, P_k \rangle = I_m$ se $i = k$, O altrimenti. Quindi

$$\langle P_j, P_k \rangle = \langle x^j I_m, P_k \rangle - \langle x^j I_m, P_k \rangle \langle P_k, P_k \rangle^{-1} \langle P_k, P_k \rangle = O.$$

g) $P_j(x)$ è ortogonale ad ogni polinomio $p_k(x)$ di grado $k < j$. Infatti $p_k(x)$ può essere scritto come combinazione lineare dei polinomi ortogonali $P_i(x)$. Poi si sfrutta la linearità del prodotto scalare e l'ortogonalità.

h) Per la (20) è

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x I_m - \langle x^1 I_m, P_0 \rangle \langle P_0, P_0 \rangle^{-1} P_0(x) \\ &= x I_m - \int_a^b x \, W(x) \, dx \left(\int_a^b W(x) \, dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Per $j \geq 1$ il polinomio $Q(x) = P_{j+1}(x) - x\, P_j(x)$ ha grado minore o uguale a j, quindi può essere scritto come combinazione lineare

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{j} H_i P_i(x)$$

e per $k \leq j$ si ha $\quad \langle Q, P_k \rangle = \sum_{i=0}^{j} H_i \langle P_i, P_k \rangle = H_k \langle P_k, P_k \rangle$. Ma

$$\langle Q, P_k \rangle = \langle P_{j+1}, P_k \rangle - \langle x\, P_j, P_k \rangle,$$

e per $k \leq j-2$ si ha

$$H_k \langle P_k, P_k \rangle = \langle P_{j+1}, P_k \rangle - \langle x\, P_j, P_k \rangle = O,$$

quindi $H_k = O$ per $k = 0, \dots, j-2$ e resta solo

$$Q(x) = H_j P_j(x) + H_{j-1} P_{j-1}(x),$$

cioè

$$P_{j+1}(x) = \Big(x\, I_m + H_j\Big)\, P_j(x) + H_{j-1} P_{j-1}(x). \tag{21}$$

Si ha

$$H_j \langle P_j, P_j\rangle = \langle Q, P_j\rangle = \langle P_{j+1}, P_j\rangle - \langle x\, P_j, P_j\rangle = -\langle x\, P_j, P_j\rangle$$

e

$$\begin{aligned} H_{j-1}\langle P_{j-1}, P_{j-1}\rangle &= \langle Q, P_{j-1}\rangle = \langle P_{j+1}, P_{j-1}\rangle - \langle x\, P_j, P_{j-1}\rangle \\ &= -\langle x\, P_j, P_{j-1}\rangle = -\langle P_j, x\, P_{j-1}\rangle. \end{aligned}$$

Esprimendo il polinomio $x\, P_{j-1}$ di grado j come combinazione lineare dei polinomi ortogonali fino al grado j si ha $\langle P_j, x\, P_{j-1}\rangle = \langle P_j, P_j\rangle$. Quindi

$$H_j = -\langle x\, P_j, P_j\rangle\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1}, \quad H_{j-1} = -\langle P_j, P_j\rangle\, \langle P_{j-1}, P_{j-1}\rangle^{-1}. \tag{22}$$

i) Posto $P_k = x^k I_m + \sum\limits_{i=0}^{k-1} x^i H_i$ per $k > 0$, è

$$\begin{aligned} O = \langle P_k, P_0\rangle &= \langle x^k\, I_m, I_m\rangle + \sum_{i=0}^{k-1} x^i \langle H_i, I_m\rangle \\ &= \langle x^k I_m, I_m\rangle + \sum_{i=0}^{k-1} H_i \langle x^i I_m, I_m\rangle = \mu_k + \sum_{i=0}^{k-1} H_i\, \mu_i, \end{aligned}$$

dove $\mu_i = \langle x^i I_m, I_m\rangle = \int_a^b x^i\, W(x)\, dx$. Moltiplicando per x^j, con $j = 1, \dots, k-1$ si ha

$$O = \langle x^{k+j} I_m, I_m\rangle + \sum_{i=0}^{k-1} H_i \langle x^{i+j} I_m, I_m\rangle = \mu_{k+j} + \sum_{i=0}^{k-1} H_i\, \mu_{i+j},$$

cioè

$$\sum_{i=0}^{k-1} H_i\, \mu_{i+j} = -\mu_{k+j}, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

In forma matriciale è

$$\big[H_0, H_1, \dots, H_{k-1}\big]\, A_{k-1} = -\big[\mu_k, \mu_{k+1} \dots, \mu_{2k-1}\big]$$

dove

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-4} \end{bmatrix},$$

quindi

$$\big[H_0, H_1, \dots, H_{k-1}\big] = -\big[\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{2k-1}\big]\, A_{k-1}^{-1}$$

e

$$P_k = x^k I_m + \sum_{i=0}^{k-1} x^i H_i = x^k I_m - \big[\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{2k-1}\big]\, A_{k-1}^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ x\, I_m \\ \vdots \\ x^{k-1}\, I_m \end{bmatrix}.$$

j) Da (21), moltiplicando a sinistra per $P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1}$ si ha

$$P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_{j+1}(x) = P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} \Big(x\, I_m + H_j\Big)\, P_j(x) + P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1}\, H_{j-1} P_{j-1}(x),$$

e analogamente

$$P_j(x)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_{j+1}(\xi) = P_j(x)^T\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1} \Big(\xi\, I_m + H_j\Big)\, P_j(\xi) + P_j(x)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1}\, H_{j-1} P_{j-1}(\xi).$$

Sottraendo dalla prima la seconda trasposta si ottiene

$$\begin{aligned} &P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_{j+1}(x) - P_{j+1}(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_j(x) \\ &= P_j(\xi)^T\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1} \big(x - \xi\big)\, P_j(x) + P_j(\xi)^T\, \big(\langle P_j, P_j\rangle^{-1} H_j - H_j^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1}\big)\, P_j(x) \\ &\quad + P_j(\xi)^T\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1} H_{j-1} P_{j-1}(x) - P_{j-1}(\xi)^T\, H_{j-1}^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_j(x). \end{aligned}$$

Ma per la (22) è $\langle P_j, P_j\rangle^{-1} H_j = H_j^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1}$ e $\langle P_j, P_j\rangle^{-1} H_{j-1} = H_{j-1}^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} = -\langle P_{j-1}, P_{j-1}\rangle^{-1}$, quindi resta

$$\begin{aligned} &\big(x - \xi\big)\, P_j(\xi)^T\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1}\, P_j(x) \\ &\quad = P_j(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_{j+1}(x) - P_{j+1}(\xi)^T \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_j(x) \\ &\quad + P_j(\xi)^T\, \langle P_{j-1}, P_{j-1}\rangle^{-1} P_{j-1}(x) - P_{j-1}(\xi)^T\, \langle P_{j-1}, P_{j-1}\rangle^{-1} P_j(x). \end{aligned}$$

Sommando su j i termini si elidono a due a due e si ottiene

$$\big(x - \xi\big) \sum_{j=0}^{n} P_j(\xi)^T\, \langle P_j, P_j\rangle^{-1}\, P_j(x) = P_n(\xi)^T \langle P_n, P_n\rangle^{-1} P_{n+1}(x) - P_{n+1}(\xi)^T \langle P_n, P_n\rangle^{-1} P_n(x).$$

Risoluzione dell'esercizio 6.

a) Verifico che le quattro relazioni che definiscono il prodotto scalare valgono

(1) simmetria $\quad \langle p, q\rangle = \displaystyle\int_a^b \int_a^b p(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy$

$$= \int_a^b \int_a^b q(x,y)\, p(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy = \langle q, p\rangle$$

(2) linearità $\quad \langle p_1 + p_2, q\rangle = \displaystyle\int_a^b \int_a^b \big(p_1(x,y) + p_2(x,y)\big)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy$

$$= \int_a^b \int_a^b p_1(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy + \int_a^b \int_a^b p_2(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \langle p_1, q\rangle + \langle p_2, q\rangle$$

(3) prodotto per scalare $\quad \langle \alpha\, p, q\rangle = \displaystyle\int_a^b \int_a^b \alpha\, p(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy$

$$= \alpha \int_a^b \int_a^b p(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy = \alpha\, \langle p, q\rangle$$

(4) positività $\quad \langle p, p\rangle = \displaystyle\int_a^b \int_a^b p^2(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy \geq 0$ e $\langle p, p\rangle = 0$ se e solo se $p(x,y) \equiv 0$.

b), c) Una base di Π_k è quella dei monomi $x^i\, y^{j-i}$, per $i = 0, \ldots, j$ e $j = 0, \ldots, k$. Quindi la dimensione di Π_k è $(k+1)(k+2)/2$.

Sia $\alpha = \int_a^b \int_a^b W(x,y)\, dx\, dy > 0$ per ipotesi. Per semplicità suppongo che i polinomi di $\mathcal{V}_k$ siano normalizzati e dimostro per induzione che l'insieme $\mathcal{V}_k$ è uno spazio vettoriale di dimensione $k+1$ formato, oltre che dallo 0, solo da polinomi di grado k. Per $k = 0$ si definisce $v_1^{(0)}(x,y) \equiv 1/\alpha$ e $\mathcal{V}_0 = \mathrm{span}\,(v_1^{(0)})$. Per $k > 0$ sia $v_i^{(k)}(x,y)$, $i = 1, \ldots, k+1$, una base di $\mathcal{V}_k$ e si considera l'insieme dei $k+2$ polinomi $w_i^{(k+1)}(x,y)$, con $w_i^{(k+1)}(x,y) = x\, v_i^{(k)}(x,y)$, per $i = 1, \ldots, k+1$ e $w_{k+2}^{(k+1)}(x,y) = y\, v_{k+1}^{(k)}(x,y)$. A questo insieme, formato da polinomi linearmente indipendenti di grado $k+1$, si applica un procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, ottenendo i polinomi $v_i^{(k+1)}(x,y)$, dove

$$v_1^{(k+1)}(x,y) = w_1^{(k+1)}(x,y),$$

e per $i = 2, \ldots, k+2$

$$t = w_i^{(k+1)}(x,y) - \sum_{j=1}^{i-1} \langle w_i^{(k+1)}, v_j^{(k+1)}\rangle\, v_j^{(k+1)}(x,y), \quad v_i^{(k+1)} = t/\langle t, t\rangle$$

Poiché una combinazione lineare di polinomi ortogonali di grado $k+1$ non può avere grado minore di $k+1$, i $k+2$ polinomi così ottenuti hanno tutti grado $k+1$. Si considera poi l'unione di tutti i polinomi $v_i^{(j)}$ per $j = 0, \ldots, k+1$. Tale insieme contiene $(k+1)(k+2)/2$, e quindi costituisce una base ortogonale di Π_k. Ne segue che i $k+2$ polinomi ottenuti sopra sono sufficienti a generare $\mathcal{V}_{k+1}$.

La base di $\mathcal{V}_{k+1}$ ottenuta sopra non è unica (a meno di multipli scalari). Una base diversa potrebbe essere ottenuta applicando il procedimento di Gram-Schmidt a partire dall'insieme dei monomi o anche semplicemente cambiando l'ordine dei $w_i^{(k+1)}(x,y)$.

d) Si suppone per semplicità che i $v_j^{(n)}$ siano normalizzati, quindi $\langle v_j^{(n)}, v_r^{(n)}\rangle = \delta_{j,r}$. Indicati con $q_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, gli elementi di una matrice ortogonale, è

$$u_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n+1} q_{i,j} v_j^{(n)}$$

e

$$\langle u_i^{(n)}, u_k^{(n)} \rangle = \sum_{j,r=1}^{n+1} q_{i,j} q_{k,r} \langle v_j^{(n)}, v_r^{(n)} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} q_{i,j} q_{k,j} = \delta_{i,k}.$$

e), f) Sia n il grado del polinomio ortogonale $p(x,y)$. Se $q(x,y)$ è un polinomio di grado minore di $n-1$, si ha

$$\begin{aligned}\langle x\, p, q \rangle &= \int_a^b \int_a^b x\, p(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_a^b \int_a^b p(x,y)\, x\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy = 0,\end{aligned}$$

perché $x\, q(x,y)$ ha grado minore di quello di $p(x,y)$. Se $q(x,y)$ è un polinomio ortogonale di grado maggiore di $n+1$, si ha

$$\langle x\, p, q \rangle = \int_a^b \int_a^b x\, p(x,y)\, q(x,y)\, W(x,y)\, dx\, dy = 0$$

perché $x\, p(x,y)$ ha grado minore di quello di $q(x,y)$ che è ortogonale. Relazioni analoghe valgono per il polinomio $y\, p(x,y)$.

Si scrive il polinomio $x\, p(x,y)$ di grado $n+1$ come combinazione dei polinomi delle basi ortogonali di $\mathcal{V}_k$ per $k = 0, \ldots, n+1$

$$x\, p(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_{k,j} v_j^{(k)}, \quad \text{con} \quad \alpha_{k,j} = \langle x\, p, v_j^{(k)} \rangle.$$

Quindi

$$x\, p(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-1,j} v_j^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} v_j^{(n)} + \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_{n+1,j} v_j^{(n+1)},$$

dove le tre sommatorie danno polinomi in $\mathcal{V}_{n-1}$, $\mathcal{V}_n$ e $\mathcal{V}_{n+1}$.

g) Trascrivo la relazione precedente per il singolo polinomio $v_i^{(n)}$ di $\mathcal{V}_n$

$$x\, v_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-1,j}^{(i)} v_j^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j}^{(i)} v_j^{(n)} + \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_{n+1,j}^{(i)} v_j^{(n+1)}, \tag{23}$$

e considero la matrice A_n, il cui elemento (i,j)-esimo è $\alpha_{n+1,j}^{(i)}$, per $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n+1$, la matrice B_n, il cui elemento (i,j)-esimo è $\alpha_{n,j}^{(i)}$, per $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n$, e la matrice C_n il cui elemento (i,j)-esimo è $\alpha_{n-1,j}^{(i)}$, per $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n-1$. In forma vettoriale si pone $v^{(k)}$ il vettore le cui componenti sono $v_j^{(k)}$, per $j = 0, \ldots, k$ e si ha per $n \geq 1$

$$x\, v^{(n)} = A_n\, v^{(n+1)} + B_n\, v^{(n)} + C_n\, v^{(n-1)}.$$

Per $n = 0$ è

$$x\, v^{(0)} = A_0\, v^{(1)} + B_0\, v^{(0)},$$

in cui $v^{(0)} = \text{cost.}$

L'unicità delle matrici così costruite dipende dal fatto che la relazione (23) esprime $x\, v_i^{(n)}$ come combinazione lineare dei vettori della base $v_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, k+1$, $k = 0, \ldots, n+1$. I coefficienti della combinazione lineare sono unici.

h) Suppongo per semplicità che i polinomi $\varphi_m(x)$ siano normalizzati per ogni m. I polinomi $q_m = \varphi_m(x)\, \varphi_{n-m}(y)$, $m = 0, \ldots n$ hanno grado n. Dimostro che sono ortogonali ai polinomi di Π_k per $k < n$ rispetto al peso $\omega(x)\, \omega(y)$. Sia $p(x, y) \in \Pi_k$, quindi

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{k} x^i\, p_{k-i}(y),$$

dove $p_{k-i}(y)$ è un polinomio di grado al più $k - i$, per cui

$$\langle q_m, p \rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle \varphi_m(x)\, \varphi_{n-m}(y), x^i\, p_{k-i}(y) \rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_a^b \int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_{n-m}(y)\, x^i\, p_{k-i}(y)\, \omega(x)\, \omega(y)\, dx\, dy$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \int_a^b \varphi_m(x)\, x^i\, \omega(x)\, dx \int_a^b \varphi_{n-m}(y)\, p_{k-i}(y)\, \omega(y)\, dy$$

$$+ \sum_{i=m}^{k} \int_a^b \varphi_m(x)\, x^i\, \omega(x)\, dx \int_a^b \varphi_{n-m}(y)\, p_{k-i}(y)\, \omega(y)\, dy,$$

dove sono nulle le sommatorie il cui primo indice è maggiore del secondo. I termini della prima sommatoria sono nulli perché $\varphi_m(x)$ è ortogonale ai polinomi x^i con $i < m$, i termini della seconda sommatoria sono nulli perché $\varphi_{n-m}(y)$ è ortogonale ai polinomi $p_{k-i}(y)$ con $i \geq m$.

Dimostro infine che i q_m sono ortogonali rispetto al peso $\omega(x)\, \omega(y)$ per $m = 0, \ldots n$

$$\langle q_m, q_r \rangle = \int_a^b \int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_{n-m}(y)\, \varphi_r(x)\, \varphi_{n-r}(y)\, \omega(x)\, \omega(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_r(x)\, \omega(x)\, dx \int_a^b \varphi_{n-m}(y)\, \varphi_{n-r}(y)\, \omega(y)\, dy = \delta_{m,r}.$$

Quindi q_m per $m = 0, \ldots n$ costituisce una base ortogonale di $\mathcal{V}_n$.

Risoluzione dell'esercizio 7.

a) $A = VS$ segue da

$$a_{i,j} = p_j(x_i) = \sum_{k=0}^{j} p_{k,j} x_i^k = \sum_{k=0}^{j} s_{k,j} v_{i,k}.$$

b) Si suppone che i polinomi siano monici e che quindi verifichino una relazione a tre termini della forma

$$p_{j+1}(x) = (x + B_{j+1})p_j(x) - C_j p_{j-1}(x), \quad \text{dove} \quad C_j = \frac{\langle p_j, p_j\rangle}{\langle p_{j-1}, p_{j-1}\rangle} > 0.$$

La matrice $T + xI$ tridiagonale di ordine n, dove T=tridiag$[-C_j, B_{j+1}, -1]$, $j = 0, \ldots, n$ verifica la relazione

$$(T + xI)\begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_{n+1}(x) \end{bmatrix}.$$

Quindi il vettore $\boldsymbol{u}_i = [p_0(x_i), \ldots, p_n(x_i)]^T$ è autovettore di T corrispondente all'autovalore $x = x_i$. Si indica con U la matrice la cui i-esima colonna è $\boldsymbol{u}_i$. Quindi $U = A^T$.

Poiché i C_j sono positivi, la matrice diagonale D, i cui elementi principali sono $d_i = \langle p_j, p_j\rangle^{1/2}$, è tale che la matrice $M = D^{-1}TD$ è simmetrica. Gli autovettori di M, normalizzati nella norma indotta dal prodotto scalare, sono i vettori ortonormali $\boldsymbol{w}_j = D^{-1}\boldsymbol{u}_j/\gamma_j$, con $\gamma_j = \|D^{-1}\boldsymbol{u}_j\|$. Quindi la matrice W, la cui j-esima colonna è il vettore $\boldsymbol{w}_j$, verifica la relazione $W^TW = I$. Si chiama Γ la matrice diagonale i cui elementi principali sono γ_j. Allora $W\Gamma = D^{-1}U = D^{-1}A^T$. Si pone $Q = \Gamma^{-1}W^TD^{-1}$, con $D_1 = \Gamma^{-1}$ e $D_2 = D^{-1}$.

c) Sostituendo $A = VS$ si ha $D_1V = QD_2^{-1}S^{-1}$. Poichè S è triangolare inferiore, la matrice $R = D_2^{-1}S^{-1}$ è triangolare inferiore, quindi QR rappresenta la fattorizzazione QR di D_1V. Questo suggerisce un algoritmo per il calcolo dei coefficienti dei polinomi $p_j(x)$ nella base dei monomi a partire dai valori che i $p_j(x)$ assumono negli zeri x_i, $i = 0, \ldots, x_n$ di $p_{n+1}(x)$ e dai fattori di normalizzazione $h_j = \langle p_j, p_j\rangle$:

(1) si costruisce la matrice di Vandermonde V;

(2) con i fattori h_j si costruisce la diagonale di D;

(3) si costruiscono i γ_j e la diagonale di D_1;

(4) si costruisce D_1V e se ne calcola la fattorizzazione QR;

(5) la matrice S cercata è $R^{-1}D$.

Risoluzione dell'esercizio 8.

a) Per semplicità si suppongono i polinomi monici, ma ciò che segue può essere esteso senza alterarne le conclusioni anche al caso che i polinomi non siano monici. La successione $p_i(x)$, $i = 0, \dots, n$, costituisce una base dello spazio $\mathcal{P}_n$ e vale $\langle p_i(x), q(x)\rangle = 0$ per ogni polinomio $q(x)$ di grado minore di i.

Dimostriamo dapprima che se $\langle xp(x), q(x)\rangle = \langle p(x), xq(x)\rangle$ per ogni coppia di polinomi in $\mathcal{P}_n$ di grado al più $n-1$, allora la successione soddisfa una relazione a tre termini. Infatti $p_{i+1}(x)$ per $i \geq 1$ può essere espresso nella base $p_0(x), \dots, p_i(x), xp_i(x)$ nel modo seguente

$$p_{i+1}(x) = \alpha_0 p_0(x) + \dots + \alpha_i p_i(x) + xp_i(x)$$

e vale

$$\begin{aligned}\langle p_j(x), p_{i+1}(x)\rangle &= \alpha_0\langle p_j(x), p_0(x)\rangle + \dots + \alpha_i\langle p_j(x), p_i(x)\rangle + \langle p_j(x), xp_i(x)\rangle\\ &= \alpha_j\langle p_j(x), p_j(x)\rangle + \langle p_j(x), xp_i(x)\rangle.\end{aligned}$$

Se $j \leq i-2$ è $\langle p_j(x), xp_i(x)\rangle = \langle xp_j(x), p_i(x)\rangle = 0$ e $\langle p_j(x), p_{i+1}(x)\rangle = 0$, per cui $\alpha_j = 0$. Resta

$$p_{i+1}(x) = (x + \alpha_i)p_i(x) + \alpha_{i-1}p_{i-1}(x).$$

Viceversa, dimostriamo che se la successione soddisfa una relazione a tre termini, allora $\langle xp(x), q(x)\rangle = \langle p(x), xq(x)\rangle$ per ogni coppia di polinomi in $\mathcal{P}_n$ di grado al più $n-1$. Per linearità basta dimostrare che la proprietà vale per i polinomi $p_i(x)$, cioè che $\langle xp_i(x), p_j(x)\rangle = \langle p_i(x), xp_j(x)\rangle$. Per simmetria, basta dimostrarlo per $i \leq j-1$. Procedendo per induzione si suppone che la relazione valga per $i \leq j-2$. Per $i = j-1$ è

$$\begin{aligned}&\langle xp_i(x), p_j(x)\rangle = \langle xp_i(x), p_{i+1}(x)\rangle\\ &\quad = \langle x\big((x+\alpha_{i-1})p_{i-1}(x) + \alpha_{i-2}p_{i-2}(x)\big), p_{i+1}(x)\rangle = \langle x^2 p_{i-1}(x), p_{i+1}(x)\rangle.\end{aligned}$$

Esprimendo il polinomio $x^2 p_{i-1}(x)$ di grado $i+1$ in termini della base $p_0(x), \dots, p_{i+1}(x)$, risulta che

$$\langle x^2 p_{i-1}(x), p_{i+1}(x)\rangle = \langle p_{i+1}(x), p_{i+1}(x)\rangle.$$

La relazione

$$\langle p_i(x), xp_j(x)\rangle = \langle p_i(x), xp_{i+1}(x)\rangle = \langle p_{i+1}(x), p_{i+1}(x)\rangle$$

si dimostra in modo analogo.

b) Posto

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i,$$

è

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} p_i q_j \langle x^i, x^j\rangle = \boldsymbol{p}^T H \boldsymbol{q}, \text{ dove } h_{i,j} = \langle x^i, x^j\rangle.$$

La matrice H è simmetrica per la simmetria del prodotto scalare. Inoltre è definita positiva perché

$$0 < \langle p(x), p(x) \rangle = \boldsymbol{p}^T H \boldsymbol{p}, \quad \text{per} \quad \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}.$$

La dimostrazione che l'applicazione che associa alla coppia $(p(x), q(x))$ il numero reale $p^T Hq$, in cui H è una matrice simmetrica definita positiva, è un prodotto scalare, è una verifica diretta delle proprietà di positività, di simmetria e di bilinearità.

c) Si è visto al punto (a) che se i polinomi ortogonali verificano la relazione a tre termini, allora $\langle xp(x), q(x) \rangle = \langle p(x), xq(x) \rangle$. Quindi per ogni i e j è

$$h_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle = \langle x^{i-1}, x^{j+1} \rangle = h_{i-1,j+1},$$

per cui la H ha uguali gli elementi sulle parallele alla diagonale secondaria, cioè è di Hankel.

d) Si ha

$$p(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n} p_j \xi_i^j, \quad q(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n} q_j \xi_i^j,$$

per cui

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_j \xi_i^j \sum_{k=0}^{n} q_k \xi_i^k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k \sum_{i=0}^{n} \xi_i^j \xi_i^k.$$

Anche in questo caso si può scrivere

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \boldsymbol{p}^T H \boldsymbol{q}, \text{ dove } h_{j,k} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^j \xi_i^k.$$

Per questa matrice H valgono le stesse proprietà che per quella definita al punto (b), in particolare che in questo modo si è definito un prodotto scalare. Inoltre si ha

$$\langle xp(x), q(x) \rangle = \sum_{i=0}^{n} \xi_i p(\xi_i) q(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n} p(\xi_i) \xi_i q(\xi_i) = \langle p(x), xq(x) \rangle,$$

e questo, per quanto dimostrato al punto (a), è sufficiente per dire che i polinomi ortogonali relativi al prodotto scalare così definito verificano una relazione a tre termini.