Esercizio 1.
a) Sia β generico autovalore di B. La matrice di iterazione $M^{-1}N = \frac{1}{\alpha+1}(B + \alpha I)$ ha autovalori $(\alpha + \beta)/(\alpha + 1)$. La condizione necessaria e sufficiente di convergenza è $-1 < (\alpha + \beta)/(\alpha + 1) < 1$, che si spezza in

$$\begin{array}{ll} -\alpha - 1 < \alpha + \beta < \alpha + 1 & \text{se } \alpha > -1 \\ \alpha + 1 < -\alpha - \beta < -\alpha - 1 & \text{se } \alpha < -1 \end{array}$$

Da cui si ottengono le due condizioni mutuamente esclusive

$$\begin{array}{l} -2\alpha - 1 < \beta < 1 \\ 1 < \beta < -2\alpha - 1 \end{array}$$

È quindi necessario che gli autovalori di B siano tutti minori di 1 o tutti maggiori di 1. Nel primo caso, dato da $\theta_1 \leq \theta_2 < 1$, basta scegliere un $\alpha > -1$. Nel secondo caso, dato da $1 < \theta_1 \leq \theta_2$, basta scegliere $\alpha < -1$.

Se invece $\theta_1 \leq 1 \leq \theta_2$ ed esistono autovalori β sia maggiori che minori di 1 non c'è soluzione.

b) Si studia il caso in cui $1 < \theta_1 < \theta_2$, l'altro caso è analogo. Si deve allora minimizzare il raggio spettrale della matrice $M^{-1}N$, e quindi determinare α che minimizzi $\max_{\beta \in [\theta_1, \theta_2]} \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1} \right|$. Vale $(\alpha+\beta)/(\alpha+1) = 1 + \frac{1}{\alpha+1}(\beta - 1) = 1 + t(\beta - 1)$ dove si è posto $t = 1/(1 + \alpha)$. Per cui il punto di minimo è $t = -2/(\theta_2 + \theta_1 - 2)$ che dà $\alpha = -(\theta_2 + \theta_1)/2$.

Esercizio 2. Se $a \leq 0$ l'unico zero di $f(x)$ è $x = 0$, se invece $a > 0$ allora gli zeri di $f(x)$ sono $x = 0$, $x = a$ e $x = -a$. Per $\alpha = 0$ è $f(x) = x^2$ e $x = 0$ è zero doppio.

Convergenza:

Se $\alpha = 0$ dalla teoria il metodo di Newton converge linearmente con fattore di convergenza $1/2$.

Se $\alpha \neq 0$ allora $f(x)$ è continua ma non derivabile in 0; l'iterazione di Newton è definita per $x > 0$ da $x_{k+1} = g(x_k)$ dove $g(x) = x - (x^2 - ax)/(2x - a) = x^2/(2x - a)$ e per $x < 0$ da $g(x) = x - (x^2 + ax)/(2x + a) = x^2/(2x + a)$. Si osserva che per $x > 0$ è $g'(x) = (2x^2 + 2ax)/(2x - a)^2$ mentre per $x < 0$ è $g'(x) = (2x^2 - 2ax)/(2x + a)^2$ per cui $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ mentre $g''(x)$ non esiste per $x = 0$.

Caso $x = 0$

Se $a > 0$ nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile e quindi non si possono applicare i teoremi visti a lezione sulla convergenza del metodo di Newton. Però essendo $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e $g'(0) = 0$, per il teorema del punto fisso si ha convergenza locale superlineare. Inoltre dall'espressione di $g(x)$ risulta che in un intorno di 0 vale $g(x) < 0$ se $x > 0$ mentre $g(x) > 0$ se $x < 0$. Ciò implica che la successione converge in modo alternato.

Per valutare l'ordine di convergenza si considera la successione $|x_{k+1}/x_k^2|$. Il limite vale $1/|a|$ quindi la convergenza è di ordine 2.

Se $a < 0$ allora $x > 0 \Rightarrow x/2 > g(x) > 0$, mentre $x < 0 \Rightarrow x/2 < g(x) < 0$. Ciò implica che le successioni generate dal metodo di Newton convergono in modo monotono a 0, decrescendo se $x_0 > 0$ crescendo se $x_0 < 0$.

Poiché $g(x)$ è derivabile infinite volte in un intorno destro di $x = 0$ e $g'(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \neq 0$ la convergenza per $x_0 > 0$ è quadratica. Analogamente si conclude se $x_0 < 0$.

Caso di $x = \pm a$ e $a > 0$.
Se $a > 0$ allora in un intorno di a e in un intorno di $-a$ la funzione $f(x)$ è C^∞ e $x = a$, $x = -a$ sono zeri semplici. Dalla teoria il metodo di Newton converge con ordine almeno 2. Poiché $f''(a), f''(-a) \neq 0$ l'ordine è 2.

Esercizio 3.

```
function y=esercizio3(u,v,d,x)
y=d.*x;
y=y+u*(v'*x);
```