Compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 2, 7/2/2014
Soluzione

Esercizio 1.

a) La matrice di iterazione $M^{-1}N$ è data da

$$M^{-1}N = -\begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1}u^T \\ T^{-1}e & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché T^{-1} è la matrice bidiagonale inferiore con 1 sulla diagonale e -1 nella sotto diagonale, vale $T^{-1}e = e_1$ dove $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Quindi $M^{-1}N$ ha $n-2$ autovalori nulli e i due autovalori rimanenti sono gli autovalori della sottomatrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \alpha^{-1}u_1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ che sono $\pm\sqrt{u_1\alpha^{-1}}$. Quindi il raggio spettrale di $M^{-1}N$ è $\rho = \sqrt{|\alpha^{-1}u_1|}$ che è minore di 1 se e solo se $\alpha > |u_1|$.

b) Il metodo di Gauss-Seidel ha per matrice di iterazione

$$G = -\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\alpha^{-1}T^{-1}e & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ T^{-1}e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1}u^T \end{bmatrix}$$

e quindi il raggio spettrale è $\rho_G = |\alpha^{-1}u^T T^{-1}e| = |\alpha^{-1}u^T e_1| = |\alpha^{-1}u_1|$. Si ha quindi convergenza ancora se $|\alpha| > |u_1|$. Però da un confronto dei due metodi segue che $\rho_G = \rho^2$. Il metodo di Gauss-Seidel ha velocità di convergenza asintotica doppia rispetto al metodo proposto e il costo computazionale per passo è lo stesso a meno di una costante additiva. Quindi il metodo di Gauss-Seidel è più conveniente.

c) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = -\begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1}u^T \\ e & T - I \end{bmatrix}$$

Se $Jv = \lambda v$ allora

$$\begin{bmatrix} \lambda & \alpha^{-1}u^T \\ e & T - I + \lambda I \end{bmatrix} v = 0$$

Quindi v risolve il sistema lineare triangolare

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_1 \\ \vdots \\ -v_1 \end{bmatrix},$$

da cui, induttivamente, si ricava che v a meno di un fattore moltiplicativo ha componenti $v_1 = 1$, $v_i = -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1})^{i-2}$, $i = 2, \ldots, n$.

Inoltre dalla prima componente della relazione $Jv = \lambda v$ si ha che $\lambda = \lambda^{-1}\alpha^{-1}\sum_{j=0}^{n-2} u_{j+1}(1-\lambda^{-1})^j$ da cui $\lambda^2 = \alpha^{-1}\sum_{j=0}^{n-2} u_j(1-\lambda^{-1})^j$. Moltiplicando ambo i membri per λ^{n-2} si ottiene il polinomio caratteristico che è monico e ha coefficiente costante $u_{n-1}\alpha^{-1}$. Ne segue che il prodotto degli autovalori ha modulo $|u_{n-1}\alpha^{-1}|$. Poiché la media geometrica del modulo del prodotto degli autovalori è minore o uguale al massimo modulo degli autovalori ne segue che $\rho_J \geq |u_{n-1}\alpha^{-1}|^{1/n}$.

Esercizio 2.
a) Dalla teoria si sa che il metodo di Newton genera successioni $x_{k+1} = g(x_k)$ dove $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Poiché $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\xi) = (x-\alpha)f'(\xi)$, dove $|\alpha - \xi| < |\alpha - x|$, vale

$$\frac{g(x)-\alpha}{x-\alpha} = \frac{x-\alpha - f(x)/f'(x)}{x-\alpha} = (1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x)}) = \frac{f'(x)-f'(\xi)}{f'(x)}.$$

Quindi, se la successione x_k è convergente, applicando la relazione precedente a x_k, poiché $\lim_k f'(x_k) = f'(\alpha) = \lim_k f'(\xi_k)$, si ha che $\lim_k \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = 0$ essendo $f'(\alpha) \neq 0$.
b) Usando la condizione di Lipschitz si deduce che

$$|1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x)}| = |f'(x) - f'(\xi)|/|f'(x)| \leq \gamma|x-\xi|/|f'(x)|.$$

Quindi, poiché $f'(\alpha) \neq 0$ esiste un $\hat\rho$ tale che $m = \min_{x\in\mathcal{I}(\hat\rho)} |f'(x)| \neq 0$, quindi per $\rho' \leq \frac{1}{2}\gamma\hat\rho/m$, e per ogni $x_0 \in \mathcal{I}(\rho')$ vale $|x_1-\alpha|/|x_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$ e induttivamente $|x_k - \alpha| \leq 1/2^k$. Per cui si ha convergenza.

Esercizio 3 Le formule che danno un passo del metodo di Gauss-Seidel sono:

$$\begin{aligned}
&y_1 = (f_1 - c_1x_2)/a_1\\
&y_i = (f_1 - b_{i-1}x_i - c_ix_{i+1})/a_i, \quad i = 2,\ldots,n-1\\
&y_n = (f_n - b_{n-1}x_{n-1})/a_n
\end{aligned}$$

Eseguendole in aritmetica floating point, denotando con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \theta_i, \sigma_i$ i vari errori locali commessi nelle singole operazioni aritmetiche del passo i-esimo, e denotando con $\hat y_i$ i valori effettivamente calcolati si ha

$$\begin{aligned}
&\hat y_1 = (f_1 - c_1x_2(1+\alpha_1))(1+\beta_1)/(a_1(1+\theta_1))\\
&\hat y_i = (f_1 - (b_{i-1}x_i(1+\gamma_i) - c_ix_{i+1}(1+\alpha_i))(1+\sigma_i))(1+\beta_i)/(a_i(1+\theta_i)), \quad i = 2,\ldots,n-1\\
&\hat y_n = (f_n - b_{n-1}x_{n-1}(1+\gamma_n))(1+\beta_n)/(a_n(1+\theta_n))
\end{aligned}$$

Da cui segue che

$$\begin{aligned}
&\hat y_1 = (\hat f_1 - \hat c_1x_2)/\hat a_1\\
&\hat y_i = (\hat f_i - \hat b_{i-1}x_i - \hat c_ix_{i+1})/\hat a_i, \quad i = 2,\ldots,n-1\\
&\hat y_n = (\hat f_n - \hat b_{n-1}xn - 1)/\hat a_n
\end{aligned}$$

dove si è posto $\hat f_i = f_i(1+\beta_i)$, $\hat a_i = a_i(1+\theta_i)$, $\hat b_i = b_i(1+\gamma_i)(1+\sigma_i)(1+\beta_i)$, $\hat c_i = c_i(1+\alpha_i)(1+\sigma_i)(1+\beta_i)$ e $\gamma_1 = \sigma_1 = 0$, $\alpha_n = \sigma_n = 0$. Poiché gli errori locali sono maggiorati in modulo dalla precisione di macchina μ, segue la stabilità all'indietro con errori relativi nell'input maggiorati al più da 3μ nella parte lineare.

Il codice octave è il seguente

```
function y=jacobi(a,b,c,f,x)
  y=[c.*x(2:end);0];
  y(2:end)=y(2:end)+b.*x(1:end-1);
  y=(f-y)./a;
```