Compito di Analisi Numerica, a.a.2014-2015, Appello 3, 9/6/2015

Esercizio 1.
Siano $f(x), h(x) \in C^1([a,b])$. Sia $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$ e $h(\alpha) = f'(\alpha)$.

a) Si dimostri che se $f'(\alpha) \neq 0$ allora esiste un intorno $\mathcal{U} \subset [a,b]$ di α tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{U}$ la successione generata dal metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, con $g(x) = x - f(x)/h(x)$ a partire da x_0 converge ad α superlinearmente.

b) Se inoltre esistono costanti $\lambda, \mu > 0$ tali che $|f'(x) - f'(\alpha)| \leq \lambda |x - \alpha|$, $|h(x) - h(\alpha)| \leq \mu |x - \alpha|$ per ogni $x \in [a,b]$ allora la convergenza è di ordine almeno 2.

c) (Facoltativo) Cosa si può dire se $f'(\alpha) = 0$?

Esercizio 2.
Si consideri la decomposizione additiva della matrice $n \times n$ $A = D - B - C$ dove $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$ è la parte diagonale di A, $-B$ è la parte strettamente triangolare inferiore di A, $-C$ è la parte strettamente triangolare superiore e $\det D \neq 0$. Si consideri la decomposizione $A = M - N$ in cui $M = \alpha D$, $N = B + C + (\alpha - 1)D$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

a) Posto $J = D^{-1}(B+C)$ dare condizioni sugli autovalori di J affinché esista $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\rho(M^{-1}N) < 1$.

b) Se gli autovalori di J sono reali, determinare α in funzione degli autovalori di J per cui $\rho(M^{-1}N)$ è minimo.

c) Nelle ipotesi del punto b) dire sotto quali condizioni per gli autovalori di J esiste α per cui $\rho(M^{-1}N) < \rho(J)$.

d) Facoltativo: Si risponda alle stesse domande nel caso in cui $M = \alpha(D - B)$, $N = C + (\alpha - 1)(D - B)$.

Esercizio 3.
Data la matrice $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ tale che $a_{i,j} = v_i$ per $j \geq i$ e $a_{i,j} = 0$ altrimenti, dare un algoritmo per il calcolo degli elementi $b_{i,j}$ della matrice $B = A^2$ che impieghi non più di n^2 operazioni aritmetiche. Scrivere una function nella sintassi di Octave che lo implementa.

Risoluzione

Esercizio 1. Poiché $h(x), f(x) \in C^1([a,b])$ allora $g(x) \in C^1([a,b])$ e vale $g'(x) = 1 - f'(x)/h(x) + f(x)h'(x)/h(x)^2$ per cui $g'(\alpha) = 0$. Esiste dunque un intorno $\mathcal{U} \subset [a,b]$ di α tale che $|g'(x)| \le \lambda < 1$ per ogni $x \in \mathcal{U}$. Per un teorema visto a lezione tutte le successioni $\{x_k\}$ generate a partire da $x_0 \in \mathcal{U}$ convergono ad α. La convergenza è superlineare essendo per il teorema di Lagrange $x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$ per ξ_k tale che $|\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$, per cui $\lim_k |x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha| = \lim_k |g'(\xi_k)| = g'(\alpha) = 0$.

Se $|f'(x) - f'(\alpha)| \le \lambda|x - \alpha|$ e $|h(x) - h(\alpha)| \le \mu|x - \alpha|$, vale

$$(h(x) - f'(\xi))/h(x) = (h(x) - h(\alpha) + f'(\alpha) - f'(x))/h(x)$$

per cui $|(h(x) - f'(\xi))/h(x)| \le |x - \alpha|(\lambda + \mu)/|h(x)|$. Ne segue $|(g(x) - \alpha)/(x - \alpha)| \le |x - \alpha|\gamma$ per una costante γ da cui la convergenza di ordine almeno 2.

Se $f'(\alpha) = 0$ può non esserci convergenza. Si consideri ad esempio, con $\alpha = 0$, la funzione $f(x) = x^2(\log x - \frac{1}{2})$ dove per continuità si pone $f(0) = 0$. Vale $f'(x) = x \log x$, $f'(0) = 0$. Ponendo $h(x) = x$ si ha $g(x) = x - x(\log x - \frac{1}{2}) = x(1 - \log x + \frac{1}{2})$ e in un intorno di 0 è $|g(x)| > |x|$.

Esercizio 2. La matrice di iterazione è

$$P = M^{-1}N = \alpha^{-1}D^{-1}(B + C + (\alpha - 1)D) = (1 - \alpha^{-1})I + \alpha^{-1}J.$$

I suoi autovalori sono

$$\mu_i = 1 - \alpha^{-1}(1 - \lambda_i),$$

dove λ_i sono gli autovalori di J.

Se $\lambda_i = a_i + b_i\mathbf{i}$ dove $\mathbf{i}^2 = -1$, allora, posto $t = \alpha^{-1}$ vale

$$|\mu_i|^2 = (1 - t + ta_i)^2 + t^2 b_i^2 = t^2((a_i - 1)^2 + b_i^2) + 2t(a_i - 1) + 1$$

Risulta quindi $|\mu_i| < 1$ se e solo se $t^2(b_i^2 + (1 - a_i)^2) + 2t(a_i - 1) < 0$. Cioè deve valere

$$0 < t < 2(1 - a_i)/(b_i^2 + (1 - a_i)^2)$$

oppure

$$2(1 - a_i)/(b_i^2 + (1 - a_i)^2) < t < 0.$$

Ciò è possibile se e solo se $1 > a_i$ per ogni i, oppure $1 < a_i$ per ogni i, cioè $1 - a_i$ non deve cambiare segno. Cioè gli autovalori di J devono avere tutti parte reale o maggiore di 1 o minore di 1.

Nel caso in cui J ha autovalori reali, se ad esempio $1 - \lambda_i > 0$, per determinare il valore ottimo t^* di t basta minimizza l'inviluppo superiore delle funzioni di t date da $|\mu_i\| = |1 - t(1 - \lambda_i)|$. Si verifica che il valore ottimo di t è l'ascissa dell'intersezione delle rette di equazione

$$\mu = 1 - t(1 - \lambda_1), \quad \mu = t(1 - \lambda_n) - 1$$

dove λ_1 e λ_n sono l'autovalore massimo e minimo di J. Per cui per il valore ottimo si ha $t^* = 1/(1-(\lambda_1+\lambda_n)/2)$ e vale $\rho^* := \rho(M^{-1}N) = ((\lambda_1-\lambda_n)/2)(1-(\lambda_1+\lambda_n)/2)$.

Soluzione analoga si ha se gli autovalori di J sono tutti minori di 1

c) Nelle ipotesi in cui tutti gli autovalori di J sono maggiori di 1 o sono minori di 1 l'espressione trovata implica che $\rho^* < \rho(J)$.

Esercizio 3. Vale

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ & v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & v_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & v_n \end{bmatrix},$$

$$B = A^2 = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1(v_1+v_2) & v_1(v_1+v_2+v_3) & \dots & v_1(v_1+v_2+\dots v_n) \\ & v_2^2 & v_2(v_2+v_3) & \dots & v_2(v_2+v_3+\dots+v_n \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & v_{n-1}^2 & v_{n-1}(v_{n-1}+v_n) \\ & & & & v_n^2 \end{bmatrix}$$

quindi $b_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} v_i v_k$ per $j \geq i$. Fissato i, per calcolare $b_{i,i}, \dots, b_{i,n}$ si usa la proprietà

$$b_{i,j} = b_{i,j-1} + v_i v_j, \quad j = i, \dots, n$$

per cui bastano $n-i+1$ moltiplicazioni e $n-i$ addizioni per un totale di $2(n-i)+1$ operazioni. Sommando per $i = 1, \dots, n$ si ottiene il costo di $2(n-1)n/2+n = n^2$ operazioni aritmetiche

Una function che implementa l'algoritmo è

```
function b=esercizio(v)
  n = length(v);
  b = diag(v.*v);
  for i=1:n
   for j=i+1:n
      b(i,j) = b(i,j-1) + v(i)*v(j);
    end
  end
end
```