Analisi Numerica, Appello 1, aa. 2008-2009, 12/1/2009

Esercizio 1. Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ un intero e si considerino le matrici $n \times n$ di elementi $T = (t_{i,j})$, $A = (a_{i,j})$ definite da $t_{i,j} = 0$ per $|i-j| > 1$, $t_{i,i} = 2$ per $i = 2, \ldots, n-1$, $t_{1,1} = t_{2,1} = \alpha$, $t_{n,n} = \beta$, $t_{i-1,i} = 1$, $i = 2, \ldots, n$, $t_{i+1,i} = 1$, $i = 2, \ldots, n-1$; $a_{1,1} = \gamma$, $a_{1,n} = a_{n,1} = \delta$, $a_{n,n} = \theta$ e $a_{i,j} = t_{i,j}$ altrove:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ \alpha & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & & & \delta \\ \alpha & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ \delta & & & 1 & \theta \end{bmatrix}.$$

a) Dire per quali valori di α e β la matrice T ammette la fattorizzazione LU. Si calcoli tale fattorizzazione e si valuti il numero di moltiplicazioni e divisioni sufficienti a calcolare L, U e a risolvere il sistema $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenendo conto della struttura specifica delle matrici L e U.
b) Dire per quali valori di α, γ, δ e θ esiste un vettore $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ e un valore di β tale che $A = T + \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$. Sotto tali condizioni, assumendo $\det T \neq 0$, si descriva un metodo per la risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ basato sulla fattorizzazione $A = T(I + T^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)$ e se ne valuti il costo in termini di numero di moltiplicazioni, divisioni e estrazioni di radici.

Esercizio 2. Per $\gamma > 0$ si consideri la funzione $f(x)$ definita da $f(0) = 0$, $f(x) = x - \gamma x / \log |x|$, se $x \neq 0, 1, -1$. Dopo aver determinato il numero di zeri di $f(x)$, si studi la convergenza locale del metodo di Newton applicato a $f(x)$ per ciascuno degli zeri, discutendone l'ordine di convergenza. Si studi per quali valori di x_0 la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo di Newton converge in modo monotono a uno zero di $f(x)$; (facoltativo) dire per quali valori di $x_0 \neq \pm 1$ la successione non è definita o non converge.

Esercizio 3. Si considerino le funzioni $f_k = f_k(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{k-1})$, $g_k = g_k(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$, definite da

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= x_{k+1}\, f_k\, g_k, \\ g_{k+1} &= (f_{k+1}^2 - g_k^2)/y_{k+1} \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

dove $f_0 = g_0 = 1$. Dare un algoritmo numericamente stabile all'indietro per il calcolo della coppia (f_n, g_n) e farne l'analisi all'indietro dell'errore.

Esercizio 4. Usando la sintassi di Octave, o di Matlab, o del linguaggio Fortran 90 scrivere una *function* o *subroutine* che calcoli $f_n + g_n$ dati un intero $n > 0$ e i vettori colonna $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, dove f_n e g_n sono le funzioni dell'esercizio 3.