Prova scritta di Analisi Numerica, Appello 5, 11/7/2013

Esercizio 1. Sia $g(x) \in C^2([a,b])$ ed $\alpha \in [a,b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Si supponga che per un particolare $x_0 \in [a,b]$ la successione $\{x_k\}$ definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, converga ad α in modo sublineare. Dire se è possibile determinare un numero reale ω tale che, posto $G(x) = (g(x) + \omega x)/(1 + \omega)$ le successioni $\{y_k\}_k$ generate dalla relazione $y_{k+1} = G(y_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, a partire da $y_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ per un opportuno $\rho > 0$ convergano ad α in modo superlineare. Nei casi in cui è possibile, si studi l'ordine di convergenza del metodo definito da $G(x)$. Nel caso non sia possibile, si consideri la funzione $G(x) = (g(g(x)) + \omega_1 g(x) + \omega_2 x)/(1 + \omega_1 + \omega_2)$ e si svolga una analoga analisi.

Esercizio 2. Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due norme su $\mathbb{R}^n$. Si consideri l'applicazione che alla matrice $n \times n$ reale A associa il numero reale $f(A) = \max_{\|x\|'=1} \|Ax\|''$. Dire quali proprietà della norma di matrici soddisfa questa applicazione motivando le risposte. Si dimostri che scegliendo $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$ si ha $f(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$.

Esercizio 3. Sia $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{n,i} = b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si dimostri che la fattorizzazione LU di A esiste ed è unica e si diano condizioni di invertibilità di A su $b_1, \ldots, b_n$. Si determini un algoritmo per risolvere il sistema lineare $Ax = f$, dove $f \in \mathbb{R}^n$, in al più $4n$ operazioni aritmetiche nel caso di A invertibile. Si implementi tale algoritmo in una *function* Octave che prende in input i vettori $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e fornisce in output la soluzione $x = (x_i)$.

Soluzione

Esercizio 1. Dalla teoria sappiamo che se la successione $\{x_k\}_k$ converge in modo sublineare allora $|g'(\alpha)| = 1$. Si presentano quindi due casi $g'(\alpha) = 1$ oppure $g'(\alpha) = -1$. Si osserva che se $\omega \neq -1$ la funzione $G(x)$ è ben definita e di classe C^2 inoltre vale $G(\alpha) = \alpha$. Dalla teoria si ha che la condizione di convergenza superlineare per la successione $\{y_k\}_k$ è $G'(\alpha) = 0$. Imponendo tale condizione si ottiene $g'(\alpha) + \omega = 0$. Per cui nel caso in cui $g'(\alpha) = -1$ basta scegliere $\omega = 1$ per avere convergenza superlineare. Poiché $G(x)$ è C^2, il valore di $G''(\alpha) = g''(\alpha)$ determina l'ordine di convergenza che è 2 se $g''(\alpha) \neq 0$, almeno 2 altrimenti. Nel caso in cui $g'(\alpha) = 1$ si ha $G'(\alpha) = (1+\omega)/(1+\omega) = 1$. Per cui nessun valore di ω cambia il tipo di convergenza. Si prova allora con la funzione $G(x) = (g(g(x)) + \omega_1 g(x) + \omega_2 x)/(1 + \omega_1 + \omega_2)$. Derivando si ha $G'(x) = g'(g(x))g'(x) + \omega_1 g'(x) + \omega_2)/(1 + \omega_1 + \omega_2)$. Se $g'(\alpha) = 1$ si ha $G'(\alpha) = (1 + \omega_1 + \omega_2)/(1 + \omega_1 + \omega_2) = 1$ per cui nessun valore di ω_1 e ω_2 modifica la velocità di convergenza.

Esercizio 2. $f(A) \geq 0$ poiché $\|\cdot\|''$ è norma. La proprietà $f(A) = 0$ se e solo se $A = 0$ è vera. Infatti, se $A = 0$ allora $f(A) = 0$ poiché $\|0\|'' = 0$. Viceversa se $f(A) = 0$ allora $0 = f(A) = \|Ax\|''$ qualunque sia x con $\|x\|' = 1$. Quindi $\|Ax\|'' = 0$ per ogni x. Da cui, essendo $\|\cdot\|''$ una norma ne segue che $Ax = 0$ per ogni x. Scegliendo $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, vettori della base canonica, si ha che A ha tutte le colonne nulle e quindi $A = 0$.

La proprietà $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$ è vera. Infatti

$$f(\alpha A) = \max_{\|x\|'=1} \|\alpha A x\|'' = \max_{\|x\|'=1} |\alpha| \|Ax\|'' = |\alpha| \max_{\|x\|'=1} \|Ax\|'' = |\alpha| f(A).$$

dove si sono applicate le proprietà $\|\alpha y\|'' = |\alpha| \cdot \|y\|''$, $\max_a |ab| = |b| \max_a |a|$.

La diseguaglianza triangolare è vera. Infatti

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \max_{\|x\|'} \|Ax + Bx\|'' \leq \max_{\|x\|'} (\|Ax\|'' + \|Bx\|'') \\ &\leq \max_{\|x\|'} \|Ax\|'' + \max_{\|x\|'} \|Bx\|'' = f(A) + f(B) \end{aligned}$$

dove la prima diseguaglianza è stata ottenuta applicando la diseguaglianza triangolare per $\|\cdot\|''$, e la seconda diseguaglianza discende dal fatto che $\max_{a,b}(a+b) \leq \max_a a + \max_b b$.

La proprietà submoltiplicativa non vale. Infatti per il caso specifico di $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$, risulta $f(A) = \max |a_{i,j}|$ e per la matrice A di elementi tutti uguali a 1 risulta $f(A) = 1$, $f(AA) = n$ per cui $f(AA) > f(A)f(A)$.

Per dimostrare che con $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$, è $f(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ si procede in due fasi. Prima si dimostra che $f(A) \leq \max_{i,j} |a_{i,j}|$, poi si fa vedere che tale valore viene raggiunto da un particolare vettore x. Per la diseguaglianza si ha:

$$f(A) = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_1=1} \max_i |\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| \le \max_{\|x\|_1=1} \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j|$$

$$\le \max_{\|x\|_1=1} \max_i \max_s |a_{i,s}| \sum_{j=1}^n |x_j| \le \max_i \max_j |a_{i,j}|$$

dove la prima diseguaglianza vale per la diseguaglianza triangolare del valore assoluto, la seconda vale poiché si maggiora ciascun $|a_{i,j}|$ col $\max_s |a_{i,s}|$; infine l'ultima uguaglianza si ottiene poiché $1 = \|x\|_1 = \sum_j |x_j|$.

Il particolare vettore x per cui questo valore viene raggiunto è il k-esimo vettore e_k della base canonica dove $|a_{h,k}|$ è il massimo degli $|a_{i,j}|$. Infatti Ae_k è il vettore di componenti $(a_{1,k}, \dots, a_{n,k})$ la cui norma infinito è $|a_{h,k}|$.

Esercizio 3. Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della fattorizzazione LU sono soddisfatte dalla matrice A infatti le sottomatrici principali di testa fino all'ordine $n-1$ sono triangolari con elementi diagonali unitari e quindi hanno determinante non nullo. Il sistema lineare ha la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

Dopo un passo di eliminiazione gaussiana si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ 0 & \hat{b}_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \hat{f}_n \end{bmatrix}$$

dove $\hat{b}_2 = b_2 + b_1$, $\hat{f}_n = f_n - b_1 f_1$. Il sistema formato dalle ultime $n-1$ equazioni e incognite ha la stessa forma del sistema originale e il procedimento di eliminazione può essere riapplicato in modo analogo per $k = 2, 3, \dots, n$ ottenendo le relazioni

$$\hat{b}_k = b_k + \hat{b}_{k-1}, \quad \hat{f}_n = \hat{f}_n - \hat{b}_{k-1} f_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \tag{1}$$

Il sistema triangolare ottenuto ha la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & \hat{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \hat{f}_n \end{bmatrix}$$

e, se $\hat{b}_n \neq 0$ può essere risolto mediante sostituzione all'indietro con le relazioni

$$x_n = \hat{f}_n/\hat{b}_n, \qquad x_i = f_i + x_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1. \tag{2}$$

Da (1) e (2) risulta che il numero di operazioni eseguite è $4n-3$.

Il codice matlab è il seguente

```
function x=risolvi(b,f)
n=length(f);
for k=2:n
  b(k)=b(k)+b(k-1);
  f(n)=f(n)-b(k-1)*f(k-1);
end
if b(n)==0
  disp('Sistema singolare')
else
  x(n)=f(n)/b(n);
  for i=n-1:-1:1
    x(i)=f(i)+x(i+1);
  end
end
```