Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2016

1. Verificare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale l'identità
$$\overline{w} = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 + i|z+iw|^2 - |z-w|^2 - i|z-iw|^2\right) \tag{1}$$
e usarla per dimostrare che per $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ vale
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\,\overline{\widehat{g}_k},$$
dove $\widehat{f}_k\,\widehat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier della f e della g, rispettivamente.
Dedurre la stessa uguaglianza studiando le proprietè della convoluzione tra f e $\overline{g(-x)}$.
Soluzione. L'identità si verifica con calcolo diretto, usando che $|w|^2 = w\overline{w}$. Peranto, usando (1) e applicando quattro volte la uguaglianza di Parseval
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |f(x)+g(x)|^2 + i|f(x)+ig(x)|^2 - |f(x)-g(x)|^2 - i|f(x)-ig(x)|^2\,dx \\ &= \frac{2\pi}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k + \widehat{g}_k|^2 + i|\widehat{f}_k + i\widehat{g}_k|^2 - |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k|^2 - i|\widehat{f}_k - i\widehat{g}_k|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\overline{\widehat{g}_k},\end{aligned}$$
dove nell'ultimo passaggio si è usato ancora (1).
Sia $h(x) = \overline{g(-x)}$, sappiamo che $f * h$ risulta continua, dato che $f, h \in L^2(0, 2\pi)$. Inoltre la serie di Fourier di $f * h$ risulta
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\widehat{h}_k e^{ikx}$$
e inoltre la serie risulta assolutamente convergente dato che
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k\widehat{h}_k| \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}_k|^2\right)^{1/2} \le \|\widehat{f}_k\|_{l^2}\|\widehat{g}_k\|_{l^2}$$
e quindi converge alla funzione $f * h$. Pertanto
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)h(x-y)\,dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\widehat{h}_k e^{ikx}.$$
Quindi osservando che $\widehat{h}_k = \overline{\widehat{g}_k}$ si ha
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\overline{g(y-x)}\,dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\overline{\widehat{g}_k} e^{ikx}.$$
e ponendo $x = 0$ si ha la tesi.

2. Sia $J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}$ con $p \geq 0$ soluzione della equazione del secondo ordine

$$J_p''(x) + \frac{1}{x}J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J_p(x) = 0$$

e siano $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i suoi zeri che sono distinti e positivi. Verificare che

$$\int_0^1 x\, J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2}[J_{p+1}(\lambda_n)]^2 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Sugg. Per l'ortogonalità osservare che se $u(x) = J_p(ax)$ *con* $a > 0$ *allora*

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) u = 0$$

Per calcolare il secondo integrale ricordare l'identità $J_p''(x) - \frac{p}{x}J_p'(x) = J_{p+1}(x)$.

Soluzione Siano $u = J_p(ax)$ e $v = J_p(bx)$ si ha quindi

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) u = 0 \qquad v'' + \frac{v'}{x} + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) v = 0.$$

Moltiplicando la prima equazione per u e la seconda per v e sottraendo termine a termine si ha

$$\frac{d}{dx}(u'v - v'u) = \frac{1}{x}(u'v - v'u) = (b^2 - a^2)uv$$

e quindi moltiplicando per x

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = \frac{1}{x}(u'v - v'u) = (b^2 - a^2)xuv$$

e poi integrando su $[0, 1]$, se $a = \lambda_m \neq \lambda_n = b$

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\, dx = x(J_p'(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x) - J_p(\lambda_m x)J_p'(\lambda_n x))\Big|_0^1 = 0.$$

Nel caso $\lambda_n = \lambda_m$ moltiplichiamo per $2x^2u'$ l'equazione per u ottenendo

$$\frac{d}{dx}(x^2u'^2 + \frac{d}{dx}(a^2x^2u^2) - 2a^2xu^2 - \frac{d}{dx}(p^2u^2) = 0$$

e integrando su $[0, 1]$

$$2a^2 \int_0^1 xu^2 = x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2\Big|_0^1.$$

Dato che $u'(1) = aJ_p'(a)$ si ottiene,

$$\int_0^1 x[J_p(ax)]^2 = \frac{1}{2}[J_p'(a)]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right)[J_p(a)]^2$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e con supporto contenuto in $(-1, 1)$. La funzione $F(x_1, x_2) = x_2 f(x_1)$ è tale che

$$F(x_1, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, 0) = f(x_1)$$

e pertanto la funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \to R^2$

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \\ -\frac{\partial F}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

risulta formalmente tale che $\text{div}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0$ per $x_2 > 0$ e $\phi_1(x_1, 0) = f(x_1)$. Spiegare perchè risulta vero solo formalmente e studiare cosa accade con l'estensione ottenuta tramite

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2\ (f * \rho_{x_2})(x_1) = x_2 \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{x_2} \rho\left(\frac{x_1 - y}{x_2}\right)\, dy,$$

dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ è l'usuale funzione usate per costruire i mollificatori e $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\rho(x\epsilon^{-1})$.

4. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcolare la norma $L^2(\mathbb{R})$ di $f * f$.

Soluzione. Usando il fatto che

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

e dato che sia $\mathrm{e}^{-|x|}$ che $\frac{2}{1+\xi^2}$ sono continue e di classe $L^1(\mathbb{R})$ possiamo applicare la formula di inversione. Quindi si ha con un riscalamento

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi \mathrm{e}^{-|\xi|}$$

Osserviamo quindi che $\mathcal{F}(f * f) = [\mathcal{F}(f)]^2 = \pi^2 \mathrm{e}^{-2|\xi|}$ e inoltre

$$\|\mathcal{F}(f * f)\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f * f\|_{L^2}^2.$$

Pertanto

$$\|\mathcal{F}(f * f)\|_{L^2}^2 = \pi^4 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4|\xi|} \frac{\pi^2}{2},$$

da cui

$$\|f * f\|_{L^2} = \frac{\pi^{3/2}}{2}.$$

5. Risolvere il problema al contorno in due dimensioni

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } x^2 + y^2 = 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 8\cos^3(\theta) & \text{in } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

la soluzione è unica? Cosa si può dire se il dato di Neumann sulla circonferenza interna viene cambiato in $\frac{\partial u}{\partial n}(1, \theta) = \cos^2(\theta)$?

Soluzione. Una funzione armonica in coordinate polari si scrive nella forma

$$u(\rho, \theta) = c_0 + c_1 \log(\rho) + \sum_{n \neq 0} \left(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}\right) \mathrm{e}^{in\theta} \qquad \rho \neq 0.$$

Andando a imporre la condizione di Neumann sul bordo esterno si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(2, \theta) = u_\rho(2, \theta) &= \frac{c_1}{\rho} + \sum_{n \neq 0} n\left(a_n \rho^{n-1} - b_n \rho^{-n-1}\right) \mathrm{e}^{in\theta}|_{\rho=2} \\ &= \frac{c_1}{2} + \sum_{n \neq 0} n\left(a_n 2^{n-1} - b_n 2^{-n-1}\right) \mathrm{e}^{in\theta} = 0 \end{aligned}$$

pertanto tutti i coefficenti devono annullarsi quindi

$$c_1 = 0 \qquad a_n 2^{n-1} - b_n 2^{-n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = 0 \qquad a_n = \frac{b_n}{2^{2n}}.$$

quindi

$$u(\rho,\theta) = c_0 + \sum_{n\neq 0} b_n \left(\frac{\rho^n}{2^{2n}} + \rho^{-n}\right) \mathrm{e}^{in\theta} \qquad \rho \neq 0.$$

e andando a imporre la condizione sul bordo interno

$$\frac{\partial u}{\partial n}(1,\theta) = -u_\rho(1,\theta) = \sum_{n\neq 0} n b_n \left(\frac{\rho^{n-1}}{2^{2n}} - \rho^{-n-1}\right) \mathrm{e}^{in\theta}|_{\rho=1}$$

$$= \sum_{n\neq 0} n b_n \left(\frac{1}{2^{2n}} - 1\right) \mathrm{e}^{in\theta} = \mathrm{e}^{i3\theta} + 3\mathrm{e}^{i\theta} + 3\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i3\theta}$$

da cui si ricava

$$b_{-3} = \frac{1}{1-2^6} \qquad b_{-1} = -1 \qquad b_1 = -4 \qquad b_3 = \frac{2^6}{3(1-2^6)}$$

La soluzione non è ovviamente unica dato che se u è soluzione, anche $u + c$ è soluzione, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Nel secondo caso il problema non è risolubile, dato che, se u è soluzione, allora, se $\Omega = \{(\rho,\theta) : 1 < \rho < 2\}$

$$0 = \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \neq 0,$$

dato che

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, d\theta = \pi.$$