Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

11 luglio 2018

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Mostrare che in generale la convoluzione con una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e anche continua non produce una funzione continua.

   Sugg. considerare $f * f$

   Soluzione. La regolarità richiede altre ipotesi come per esempio il supporto compatto di almeno una delle funzioni. Vediamo come costruire un controesempio. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e pari tale che
$$f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \text{ma } f \notin L^2(\mathbb{R}).$$
   si definisca $g(x) = (f * f)(x)$, ovviamente $g \in L^1(\mathbb{R})$, ma calcolando $g(0)$ si ha
$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\,dy = +\infty.$$

2. Sia per $0 < \alpha \leq 1$ data $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, e sia ρ un mollificatore. Mostrare che per $\epsilon \to 0$
$$\|u^2 * \rho_\epsilon - (u * \rho_\epsilon)^2\|_{L^\infty} \to 0$$
   stimandone, se possibile, l'ordine di convergenza in funzione in ϵ in termini di α.

   Soluzione. Scriviamo esplicitamente la quantità da stimare, usando il fatto che $\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon = 1$
$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} u^2(x-y)\rho_\epsilon(y)\,dy - \left(\int_{\mathbb{R}} u(x-y)\rho_\epsilon(y)\,dy\right)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u^2(x-y)\rho_\epsilon(y)\rho_\epsilon(z)\,dz\,dy - \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\rho_\epsilon(y)\,dy \int_{\mathbb{R}} u(x-z)\rho_\epsilon(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x-y)\big[u(x-y) - u(x-z)\big]\rho_\epsilon(y)\rho_\epsilon(z)\,dz\,dy.
\end{aligned}$$
   Usando ora le proprietà di u e il fatto che supp $\rho_\epsilon \subset [-\epsilon, \epsilon]$ si ha
$$\begin{aligned}
\big|(u^2 * \rho_\epsilon)(x) - (u * \rho_\epsilon)^2(x)\big| &\leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |y-z|^\alpha \rho_\epsilon(y)\rho_\epsilon(z)\,dz\,dy \\
&\leq C_\alpha \|u\|_{L^\infty} |2\epsilon|^\alpha \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(y)\,dy \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(z)\,dz = C_\alpha \|u\|_{L^\infty}(2\epsilon)^\alpha,
\end{aligned}$$
   da cui la convergenza a zero unifrome di ordine ϵ^α.

3. a) Si consideri l^∞ lo spazio di Banach delle successioni reali limitate. Si consideri la funzione $S : l^\infty \to \mathbb{R}$ definita da
$$Sx = \limsup_{n\to\infty} x_n$$
   risulta lineare?

b) Si consideri poi la funzione T definita da

$$Tx = \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} x_n + \frac{1}{2} \limsup_{n\to+\infty} x_n,$$

e si determini se è lineare.

Per il punto b) può essere utile utilizzare la successione $x_n = (n \bmod 3)$.

Soluzione. Osserviamo che la mappa S è ben definita. Inoltre proviamo a calcolare se $S(\lambda x) = \lambda S(x)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prendiamo la successione

$$x_n = 0 \text{ se } n \text{ è dispari} \qquad x_n = 1 \text{ se } n \text{ è pari}$$

per cui $\limsup x_n = 1$. Pertanto si ha

$$\limsup S(\lambda x) = \lambda \qquad \text{se } \lambda > 0$$

$$\limsup S(\lambda x) = 0 \qquad \text{se } \lambda \leq 0,$$

quindi non è lineare.

Prendiamo ora le successioni $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$

$$x_n = (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots)$$

$$y_n = (2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, \dots)$$

e quindi

$$x_n + y_n = (3, 3, 0, 3, 3, 0, 3, 3, 0, \dots)$$

In tal modo si ha

$$Tx = Ty = \frac{1}{2}(0+2) = 1 \qquad T(x+y) = \frac{1}{2}(0+3) = \frac{3}{2} \neq Tx + Ty = 2.$$

4. Usando l'identità

$$a_N b_N - a_M b_M = \sum_{i=M+1}^{N} a_i(b_i - b_{i-1}) + \sum_{i=M+1}^{N} b_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \qquad M < N$$

studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\log(n)}$$

Soluzione. Osserviamo che i coefficienti $\log(n)$ sono positivi, decrescenti e hanno limite zero. Applichiamo la uguaglianza di sopra con $a_n = \log(n)$ e $b_n = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ che soddisfa

$$|B_n(x)| = \left| \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \qquad x \neq 0.$$

Applicando la formula di somma si ha

$$\sum_{n=M+1}^{N} \log(n)\mathrm{e}^{inx} = \log(N)B_N(x) - \log(M)B_M(x) + \sum_{n=M+1}^{N} B_{n-1}(x)(\log(n) - \log(n-1)).$$

I primi due termini del lato destro si annullano per $N, M \to +\infty$, mentre il terzo si stima come

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} B_{n-1}(x)(\log(n) - \log(n-1))\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}(\log(M) - \log(N)),$$

che si annulla per $N, M \to +\infty$, mostrando che la successione è di Cauchy per $x \neq 0$. Prendendo parte reale e immaginaria

$$\Re\Big(\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\log(n)}\Big) = \sum_{n\geq 2} \frac{\cos(nx)}{\log(n)} \qquad \text{converge per } x \neq 0$$

$$\Im\Big(\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\log(n)}\Big) = \sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\log(n)} \qquad \text{converge per } x \in \mathbb{R}$$

5. Chiamato G nucleo Gaussiano
$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},$$
(con $G = 0$ per $t < 0$) uni-dimensionale, allora $G(0, t-s)$ rappresenta la concentrazione in $x = 0$, al tempo $t > s$ di una sorgente di intensità unitaria situata in $x = 0$ all'istante $t = s$.

Determinare, se è presente una sorgente (tipo inquinante) in $x = 0$ di intensità
$$q(t) = \begin{cases} Q \in \mathbb{R}^+ & 0 < t < T \\ 0 & t > T, \end{cases}$$
la concentrazione nel punto $x = 0$ al tempo t e il comportamento asintotico per $t \to +\infty$.

Soluzione. Se la sorgente al tempo $t = s$ ha intensità $q(s)$, il suo contributo alla concentrazione in $x = 0$, al tempo t sarà

$$G(0, t-s)\, q(s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\, q(s) & t > s. \end{cases}$$

“Sommando” (o meglio integrando) tutti i contributi per $s < t$ si ottiene

$$u(0,t) = \int_0^{+\infty} G(0, t-s)\, q(s)$$

e quindi

$$\text{per } t < T \qquad u(0,t) = Q\int_0^t G(0,t-s)\, ds = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{Q}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$$

mentre

$$\text{per } t > T \qquad u(0,t) = Q\int_0^T G(0,t-s)\, ds = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{Q}{\sqrt{\pi}}\big[\sqrt{t} - \sqrt{t-T}\big].$$

Pertanto
$$u(0,t) \sim \frac{2QT}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \text{per } t \to +\infty.$$