Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

6 giugno 2018

1. Data la serie non convergente $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$, si calcoli
$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{-ak}.$$
In maniera analoga si provi a dare senso a $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$ tramite
$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx.$$
Più in generale si studi per $\phi\in C^\infty([0,\infty))$, con $\phi,\phi'\in L^1(\mathbb{R}^+)$ il limite
$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \sin(x)\phi(ax)\,dx.$$
Soluzione. La serie risulta
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-ak}=\lim_N\sum_{k=0}^{N}(-\mathrm{e}^{-a})^k=\lim_N\sum_{k=0}^{N}\frac{1-\mathrm{e}^{-a})^{N+1}}{1+\mathrm{e}^{-a}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-a}}$$
e quindi $\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-ak}1/2$.
In modo simile
$$\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx=\frac{1}{1+a^2}$$
e quindi $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-ax}\,dx=1$.
Più in generale integrando per parti
$$\int_0^\infty \sin(x)\phi(ax)\,dx=-\cos(x)\phi(ax)\Big|_0^\infty+a\int_0^\infty\cos(x)\phi'(ax)\,dx$$
$$=\phi(0)+\int_0^\infty \cos(y/a)\phi'(y)\,dy,$$
dato che $\phi\to 0$ per $x\to+\infty$. E quindi col lemma di Riemann-Lebesgue
$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \sin(x)\phi(ax)\,dx=\phi(0).$$

2. Si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier della funzione
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\log|x|)^2} & \text{per } 0<|x|<\mathrm{e}^{-3},\\[2ex] 0 & \text{per } x=0 \text{ e per } \mathrm{e}^{-3}<|x|<\pi.\end{cases}$$

Soluzione La funzione $f(x)$ è derivabile in $(-\pi,\pi]\backslash\{0,\pm e^{-3}\}$ e quindi in tale intervalli si ha convergenza puntuale. Nei punti $\pm e^{-3}$ la funzione ha salto ed esistono derivate destre e sinistre finite, quindi la serie converge a metà del salto, cioè $1/18$. Nel punto 0 la funzione risulta continua, ma non derivabile, in quanto $f'(x)=-\frac{2}{x\log^3(x)}$ intorno a 0. Possiamo però usare il criterio del Dini, osservando che

$$\int_0^h \frac{f(0+t)-f(0)}{t}dt=\int_0^h \frac{1}{t\,(\log(t))^2}dt=-\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\log(t)}\Big|_a^h<+\infty,$$

per h sufficientemente piccolo e quindi si ha convergenza anche in $x=0$.

3. Si consideri il problema ai valori iniziali con condizioni periodiche in $x\in(-\pi,\pi)$

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+u_{xxxx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\,e^{ikx} & (x,t)\in(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}^+,\\ \\ u(x,0)=0, \end{cases}$$

e discutere, al variare di g_k, quando la soluzione risulta limitata per $t>0$.

Soluzione Cercando soluzioni del tipo $u(x,t)=\sum_k c_k(t)e^{ikx}$ si ottengono i problemi di Cauchy

$$c_k'+(k^2+k^4)c_k(t)=g_k \qquad c_k(0)=0$$

che hanno come soluzione

$$c_0=g_0t \qquad \text{e} \qquad c_k=g_k\frac{1-e^{-(k^4+k^2)t}}{k^2\,(k^2+1)},\ \text{per } k\neq 0,$$

e condizione necessaria per la limitatezza è $g_0=0$.

4. Si consideri l'operatore $L=-u_{xx}-4u$ per $x\in(0,\pi)$. Si mostri che la corrispondente forma bilineare

$$B(u,v)=\int_0^\pi u_xv_x-4uv\,dx,$$

non è definita positiva nello spazio delle funzioni nulle al bordo e a quadrato sommabile assieme alle derivate prime.

Mostrare inoltre che il problema al contorno

$$\begin{cases} -u_{xx}-4u=\sin(2x) & x\in]0,\pi[,\\ \\ u(0)=u(\pi)=0, \end{cases}$$

non ha soluzione (debole). In particolare usare una opportuna v per mostrare che $B(u,v)\neq\int_0^\pi uv\,dx$.

Soluzione Prendendo come $v(x)=\sin(x)$ si ha

$$B(u,u)=\int_0^\pi u_x^2-4u^2\,dx=\int_0^\pi \cos^2(x)-4\sin^2(x)\,dx=-\frac{3\pi}{2}.$$

Se il problema in questione avesse soluzione si avrebbe per ogni v

$$\int_0^\pi u_xv_x-4uv\,dx=\int_0^\pi \sin(2x)v\,dx,$$

e scegliendo $v(x)=\sin(2x)$ si ha, integrando per parti,

$$0=\int_0^\pi 2u_x\cos(2x)-4u\sin(2x)\,dx\neq\int_0^\pi \sin^2(2x)\,dx=\frac{\pi}{2},$$

5. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che chiamata $f(x) = (a + bx^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ si abbia

$$\widehat{f}(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione Ricordiamo che

$$\widehat{\mathrm{e}^{-x^2/2}}(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\xi^2/2},$$

mentre

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{f}(\xi) = -\widehat{x^2 f(x)}(\xi),$$

da cui

$$\widehat{x^2 f(x)}(\xi) = -\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\xi^2 - 1\right),$$

pertanto si ha

$$\widehat{(a + bx^2)}\mathrm{e}^{-x^2/x}(\xi) = \sqrt{2\pi}(a + b - b\xi^2)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

e l'uguaglianza può valere solo se $a = b = 0$.