Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 febbraio 2018

1. Sia l^1 lo spazio delle successioni complesse con la norma $\|x\|_{l^1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Data una successione di numeri complessi $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si consideri l'operatore lineare da l^1 in se stesso

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$$

Se ne calcoli la norma.

Si consideri poi l'operatore esponenziale

$$\mathrm{e}^{tA} x = (\mathrm{e}^{t\lambda_1} x_1, \mathrm{e}^{t\lambda_2} x_2, \dots)$$

e se ne calcoli la norma come applicazione $A: \; l^1 \to l^1$.

Può la norma $\|A\|$ essere infinita, ma al tempo stesso essere finita la norma $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ per ogni $t \geq 0$?

Soluzione. Osserviamo che

$$\|Ax\|_{l^1} \leq \sum_k |\lambda_k x_k| \leq \sup_k |\lambda_k| \sum_k |x_k| = \sup_k |\lambda_k| \|x\|_{l^1}$$

per cui $\|A\| \leq \sup_k |\lambda_k|$. Per dimostrare l'uguaglianza basta considerare una successione $\lambda_j \to \sup_k \lambda_k$ e le successioni $x^j \in l^1$ tali che $x^j_m = \delta_{jm}$.

Con lo stesso ragionamento si ha che

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}, t\geq 0} |\mathrm{e}^{t\lambda_k}|.$$

Pertanto, per $\lambda_k = a_k + ib_k$ si ha, se $a_k \leq 0$

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}, t\geq 0} |\mathrm{e}^{t(a_k+ib_k)}| = \sup_{k\in\mathbb{N}, t\geq 0} |\mathrm{e}^{t\, a_k}||\mathrm{e}^{it\, b_k}| \leq 1.$$

Pertanto se consideriamo $\lambda_k = a_k + ib_k$ con $a_k \leq 0$ e $b_k \to +\infty$ si ha $\|A\| = +\infty$, mentre $\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq 1$, per ogni $t \geq 0$.

2. Sia

$$V := \left\{ v \in L^2(-1,1) : \; (1-x^2)^{1/2} v' \in L^2(-1,1) \right\}.$$

Verificare che

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{-1}^1 u\, v + (1-x^2) u'\, v'\, dx,$$

definisce un prodotto scalare. Studiare, per $f \in L^2(-1,1)$ il problema variazionale

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{-1}^1 f\, v\, dx,$$

e interpretarlo in senso forte.

Soluzione. La simmetria, linearità e la non-negatività sono ovvie, mentre

$$\langle u, u\rangle_V = \int_{-1}^{1} u^2 + (1-x^2)(u')^2\,dx = 0$$

implica che $u = 0$ q.o. , da cui $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_V$ è un prodotto scalare. Verifichiamo ora la completezza rispetto alla norma $\|\,.\,\|_V$ indotta dal prodotto scalare. Se $\{u_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare, allora $\{u_n\}$ risulta di Cauchy anche in $L^2(-1,1)$ e quindi

$$u_n \to \overline{u} \qquad \text{in } L^2(-1,1).$$

D'altra parte anche $\{(1-x^2)^{1/2}u_n'\}$ risulta di Cauchy in $L^2(-1,1)$ e quindi

$$(1-x^2)^{1/2}u_n' \to \overline{w} \qquad \text{in } L^2(-1,1).$$

Quindi, a meno di sottosuccessioni,

$$u_n \to \overline{u} \qquad \text{e} \qquad (1-x^2)^{1/2}u_n' \to \overline{w} \qquad \text{q.o. in } (-1,1).$$

e pertanto si ha anche che

$$u_n' \to \overline{z} \qquad \text{e} \qquad \overline{w} = (1-x^2)^{1/2}\overline{z} \qquad \text{q.o. in } (-1,1),$$

da cui $\overline{z} = \overline{u}'$ e segue la completezza.

Osserviamo che

$$\left|\int_{-1}^{1} f v\,dx\right| \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_V\|v\|_V$$

per cui abbiamo un funzionale lineare e continuo e per il teorema di Riesz esiste $F \in V$ tale che

$$\int_{-1}^{1} f v\,dx = \langle F, v\rangle$$

e quindi esiste una e una sola soluzione del problema variazionale.

Per l'interpretazione in senso forte, integrando per parti si ha

$$(1-x^2)u'v'\big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\left\{u - \left[(1-x^2)u'\right]'\right\} v\,dx = \int_{-1}^{1} f v\,dx \qquad \forall\, v \in V.$$

Dato che si ha uguaglianza per ogni $v \in V$ questi implica che

$$-\left[(1-x^2)u'\right]' + u = f \qquad \text{in } (-1,1)$$

(questo se si sceglie una v a supporto compatto), poi l'arbitrarietà di v implica che

$$\lim_{x\to\pm1}(1-x^2)u'(x) = 0,$$

che sono le condizioni "naturali" per il problema, in questo caso di tipo Neumann.

3. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} y\,u_{xx} + u_y = 0 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

e discutere quando la soluzione trovata sia una soluzione regolare del problema.

Soluzione. Cercando soluzioni per separazione delle variabili $u(x,y) = X(x)Y(y)$ si ha

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'}{yY}$$

e visto che i due termini devono essere uguali a una costante, si ha per X l'equazione dell'oscillatore armonico con condizioni di Dirichlet, quindi $X_n(x) = a_n \sin(nx)$ con $n \in \mathbb{N}$, mentre per Y la corrispondente equazione è $Y_n' = n^2 y Y_n$ da cui

$$Y_n(y) = b_n \mathrm{e}^{n^2y^2/2}.$$

La soluzione formale risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \mathrm{e}^{n^2y^2/2} \tag{1}$$

dove $f(x) = \sum_n a_n \sin(nx)$.

Dato che $\mathrm{e}^{n^2y^2/2} \to +\infty$ per $n \to +\infty$, qualsiasi sia $y \neq 0$, se $f \in L^2(0,\pi)$ la serie (1) in generale sarà non convergente per nessun $y \neq 0$. Delle condizioni sufficienti affinchè la serie converga sono che f abbia solo un numero finito di coefficienti a_n diversi da zero, oppure che i i coefficienti vadano a zero in modo molto rapido. Per esempio, per avere una soluzione (almeno nel senso di L^2) sul quadrato $(0,\pi) \times (-L, L)$ si dovrà chiedere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \mathrm{e}^{n^2L^2} < +\infty,$$

quindi un decadimento esponenziale dei coefficienti di Fourier.

4. Mostrare, con la separazione delle variabili che il problema al contorno

$$\begin{cases} g(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + h(x)u \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \end{cases}$$

porta a un sistema di Sturm-Liouville, se i coefficienti sono regolari e con segni determinati. Si determini la soluzione formale del problema.

Soluzione. Separando le variabili come $u(x,t) = X(x)T(t)$ si ha

$$g(x)XT' = T\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dX}{dx}\right] + h(x)XT,$$

e dividendo per $g(x)XT$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{g(x)X}\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dX}{dx}\right] + \frac{h(x)}{g(x)}$$

e quindi si hanno le due equazioni

$$T' + \lambda T = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dX}{dx}\right] + [h(x) + \lambda g(x)]\,X = 0.$$

Pertanto se $K, h \in C^1([0,L])$ e $h, g \in C^0([0,L])$, con $K > 0$ e $g > 0$ il problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[K(x)\dfrac{dX}{dx}\right] + [h(x) + \lambda g(x)]\,X \\[2ex] \qquad\qquad X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

risulta un problema di Sturm-Liouville regolare. Chiamate X_n la soluzione (normalizzata in L^2) relativa all'autovalore λ_n la soluzione formalmente risulta essere

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t} X_n(x),$$

dove

$$c_n = \int_0^L f(x) X_n(x)\, dx.$$

5. Calcolare per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ il valore dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha}\, d\alpha$$

Sarà utile considerare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica di un intervallo.

Soluzione. La trasformata di Fourier di $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ risulta essere

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-ix\alpha}\, dx = 2\frac{\sin(\alpha\, a)}{\alpha} \qquad \alpha \neq 0,$$

mentre per $\alpha = 0$ si ha $\widehat{f}(0) = 2a$.

Osservando che la funzione $f(x)$ è regolare a tratti abbiamo che vale la formula di inversione

$$\frac{1}{2\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\alpha)\, \mathrm{e}^{i\alpha\, x}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\alpha)\, \mathrm{e}^{i\alpha\, x}\, d\alpha = \begin{cases} f(x) & x \neq \pm a, \\ \dfrac{1}{2} & x = \pm a, \end{cases}$$

dove l'integrale improprio è interpretato nel senso del valore principale di Cauchy. Ora sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\alpha)\, \mathrm{e}^{i\alpha\, x}\, d\alpha &= \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\alpha) \cos(\alpha\, x)\, d\alpha + \frac{i}{2\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\alpha) \sin(\alpha\, x)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha\, a)}{\alpha} \cos(\alpha\, x), d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha\, a)}{\alpha} \sin(\alpha\, x)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha\, a)}{\alpha} \cos(\alpha\, x), d\alpha \end{aligned}$$

dato che il secondo è l'integrale di una funzione dispari su intervalli simmetrici e ne segue

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha\, a)\cos(\alpha\, x)}{\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \dfrac{\pi}{2} & |x| = a \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$