Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

22 gennaio 2018

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Si può verificare che la successione $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge, se non quando $z = 1$. Studiare però il limite

$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{z^M + z^{M+1} + \cdots + z^{N-1}}{N-M}.$$

Sia poi $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice unitaria. Mostrare che

$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} U^n f = Pf \qquad \forall\, f \in \mathbb{C}^n,$$

dove P è il proiettore sul sottospazio invariante $H \subseteq \mathbb{C}^n$ dei vettori tali che $Uf = f$.

Sugg. Dimostrare che $\mathbb{C}^n = H \oplus Y$, *dove* Y *è lo span dei vettori della forma* $Ug - g$.

Soluzione. Se $z \neq 1$, usando la formula per somma di una progressione geometrica si ottiene

$$\left|\frac{z^M + z^{M+1} + \cdots + z^{N-1})}{N-M}\right| = \left|\frac{z^M(z^{N-M+1} - 1}{(N-M)(z-1)}\right| \leq \frac{2}{(N-M)|z-1|}$$

quindi si ha convergenza a 0, mentre se $z = 1$ la media vale sempre 1, pertanto

$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{z^M + z^{M+1} + \cdots + z^{N-1}}{N-M} = \begin{cases} 0 & \text{se } z \neq 1, \\ 1 & \text{se } z = 1. \end{cases}$$

Dimostriamo che l'ortogonale di $H = \{f \in \mathbb{C}^n : \ Uf = f\}$ è generato dai vettori della forma $Ug - g$. Infatti, dato che U è unitaria, si ha $U^* = U^{-1}$ e quindi se $f \in H$ si ha

$$< f, Ug > = < U^* f, g > = < U^{-1} f, g > = < f, g > \qquad \forall\, g \in \mathbb{C}^n,$$

da cui segue che $< f, Ug - g > = 0$, cioè $f \perp Ug - g$. Usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$< f, Uf - f > = < f, Uf > - < f, f > \leq 0,$$

dato che $\|Uf\| = \|f\|$. Se inoltre $f \notin H$ allora allora $Uf \neq f$ e quindi

$$< f, Uf - f > < 0,$$

pertanto f non è ortogonale a $Uf - f$ e quindi H è il complemento ortogonale del sottospazio (chiuso) generato da $Ug - g$ al variare di $g \in \mathbb{C}^n$.

Ora se $f \in X$ si ha $Pf = f$ e $U^n f = f$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ da cui segue la tesi banalmente.

Nel caso $f = Ug - g$ si ha $Pf = 0$ ma anche $U^n f = U^{n+1} g - U^n g$ da cui segue

$$\| \sum_{n=M}^{N-1} U^n f \| = \|U^N g - U^M g\| \leq 2\|g\|$$

e quindi la tesi dividendo per $N - M$ e passando al limite.

2. Sia $0 < p < 1$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e si consideri

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{misurabile e t.c.} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Mostrare che la quantità $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ non è una norma quando $0 < p < 1$.

Mostrare che però vale la diseguaglianza

$$\forall\, p \in (0,1) \qquad \|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \qquad \forall\, f, g \in L^p(\Omega)$$

Soluzione. Osserviamo che vale $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ (omogeneità) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, ma la diseguaglianza triangolare non vale. Basta considerare per esempio $\Omega = (0,2)$ e $f = \chi_{(0,1)} E$ e $g = \chi_{(1,2)}$. Si ha infatti

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \quad \|f+g\|_p = 2^{1/p} \text{ ma } \quad 2^{1/p} \leq 1 + 1 = 2 \Longleftrightarrow p \geq 1.$$

Per verificare la diseguaglianza voluta basta integrare la diseguaglianza

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p \qquad \forall\, x \in \Omega,$$

e questo deriva dalla diseguaglianza

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+,$$

che si verifica osservando che la funzione

$$\mathcal{F}(a) = (a+b)^p - a^p$$

risulta tale che $\mathcal{F}'(a) \leq 0$ per ogni b fissato.

3. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ (non-negativa tale che $\mu(\mathbb{R}) = 1$) e si definisca la funzione $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} d\mu(x).$$

a) Mostrare che $\widehat{\mu} \in C_b(\mathbb{R})$. Si ha che $\widehat{\mu} \to 0$ per $\xi \to +\infty$?

La funzione continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice definita positiva se la matrice $A_{jk} := F(x_j - x_k)$ è definita positiva per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni scelta dei punti $x_n \in \mathbb{R}$ (con $n = 1, \ldots, N$) si ha

$$\sum_j \sum_k F(x_j - x_k) \overline{u}_j u_k \geq 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{C}^N.$$

b) Mostrare che $\widehat{\mu}$ è definita positiva.

Soluzione. a) La funzione μ è limitata dato che

$$|\widehat{\mu}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-ix\xi}| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = 1.$$

inoltre

$$\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-ix\xi} - \mathrm{e}^{-ix\eta}) d\mu(x).$$

Pertanto

$$|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\eta)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (\xi - \eta) \mathrm{e}^{-ix\theta} d\mu(x) \right| \leq |\xi - \eta| \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu = |\xi - \eta|.$$

La funzione $\widehat{\mu}$ in generale non è infinitesima per $\xi \to \pm\infty$. Per esempio se μ è la misura concentrata in $x = 0$ definita da

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$$

allora

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} d\mu(x) = 1.$$

b) Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k \widehat{\mu}(\xi_j - \xi_k)\overline{u}_j u_k &= \sum_j \sum_k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix(\xi_j - \xi_k)} d\mu(x) \overline{u}_j u_k \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_j \sum_k \mathrm{e}^{ix\xi_j} \overline{u}_j \mathrm{e}^{-ix\xi_k} u_k \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_k \mathrm{e}^{-ix\xi_k} u_k \right|^2 d\mu(x) \geq 0 \end{aligned}$$

4. Si consideri lo spazio di Hilbert $X = L^2(0, +\infty)$ e sia $A : X \to X$ definito da

$$(Au)(x) = 2u(x + 1).$$

   a) Si dimostri che A è lineare e limitato e se ne calcoli la norma;
   b) Si determinino $Ker(A)$ e $Im(A)$;
   c) Si determini A^*, l'aggiunto di A.

   Soluzione. a) L'applicazione è ovviamente lineare e si ha

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}},$$

   ma

$$\|Au\|_{L^2} = \left(\int_0^\infty 4|u(x + 1)|^2 \, dx \right)^{1/2} = 2 \left(\int_1^\infty |u(y)|^2 \, dy) \right)^{1/2} \leq 2\|u\|_{L^2},$$

   e quindi $\|A\| \leq 2$. In realtà la norma è esattamente uguale a 2. Basta considerare la funzione $u(x) = \frac{1}{x}\chi_{]1,+\infty[}(x)$ in tal caso $\|u\|_{L^2} = 1$ e $\|Au\|_{L^2} = 2$ con calcolo esplicito.

   b) il nucleo di A è dato dalle funzioni di $L^2(0, \infty)$ tali che $u(x) = 0$ per x quasi ovunque in $(1, +\infty)$. L'immagine è tutto $L^2(0, \infty)$ perchè data $f \in L^2(0, \infty)$ essa è immagine di $g(x) = \frac{1}{2} f(x - 1)\chi_{]1,\infty[}(x) \in L^2(0, \infty)$.

   c) Per determinare l'aggiunto osserviamo che

$$\int_0^\infty Af(x)\overline{g(x)} \, dx = \int_0^\infty 2f(x+1)\overline{g(x)} \, dx = \int_1^\infty f(y)\overline{2g(y - 1)} \, dy = \int_0^\infty f(y)\overline{2g(y - 1)}\chi_{]1,\infty[}(x) \, dy,$$

   da cui $A^*g(x) = 2g(x - 1)\chi_{]1,\infty[}(x)$.

5. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger in n-dimensioni ($n \geq 1$) e con condizioni periodiche rispetto a tutte le variabili

$$\begin{cases} i\, u_t + \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n, \\ \\ u(0, x) = g(x) & \text{in } \mathbb{T}^n. \end{cases}$$

Sia $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, si scriva la soluzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ e si studi poi l'equazione di bilancio della norma $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Si consideri poi il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} i\, u_t + \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si trovi una soluzione tramite la trasformata di Fourier.

Soluzione. Cerchiamo una soluzione del tipo $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(t) \mathrm{e}^{ik\cdot x}$ con c_k funzioni scalari complesse del tempo. Sostituendo si ha

$$i\, u_t + \Delta u = i \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k'(t) \mathrm{e}^{ik\cdot x} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k |k|^2 \mathrm{e}^{ik\cdot x}$$

da cui serve risolvere $ic_k'(t) - c_k|k|^2 = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}^d$ e quindi

$$c_k(t) = c_k(0) \mathrm{e}^{-i|k|^2 t}$$

e pertanto, se $g(x) \in L^2(\mathbb{T}^n)$ allora $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{g}_k \mathrm{e}^{ik\cdot x}$ e, imponendo il dato iniziale,

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{g}_k \mathrm{e}^{-i|k|^2 t} \mathrm{e}^{ik\cdot x}.$$

Da Parseval si ottiene subito che

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Nel caso dell'equazione del calore si ha che la soluzione risulta

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$$

e ponendo formalmente it al posto di t si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{i|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$$

interpretando $i^{1/2}$ come $\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$.