Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2016

1. Verificare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale l'identità
$$z\overline{w} = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 + i|z+iw|^2 - |z-w|^2 - i|z-iw|^2\right) \tag{1}$$
e usarla per dimostrare che per $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ vale
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\,\overline{\widehat{g}_k},$$
dove $\widehat{f}_k\,\widehat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier della f e della g, rispettivamente.
Dedurre la stessa uguaglianza studiando le proprietè della convoluzione tra f e $\overline{g(-x)}$.

2. Sia $J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}$ con $p \geq 0$ soluzione dell'equazione del secondo ordine
$$J_p''(x) + \frac{1}{x}J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J_p(x) = 0$$
e siano $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i suoi zeri che sono distinti e positivi. Verificare che
$$\int_0^1 x\,J_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2}[J_{p+1}(\lambda_n)]^2 & \text{se } m = n \end{cases}$$
Sugg. Per l'ortogonalità osservare che se $u(x) = J_p(ax)$ con $a > 0$ allora
$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0$$
Per calcolare il secondo integrale ricordare l'identità $J_p'(x) - \frac{p}{x}J_p(x) = J_{p+1}(x)$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e con supporto contenuto in $(-1, 1)$. La funzione $F(x_1, x_2) = x_2 f(x_1)$ è tale che
$$F(x_1, 0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, 0) = f(x_1)$$
e pertanto la funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \to R^2$
$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \\ -\frac{\partial F}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$
risulta formalmente tale che $\text{div}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0$ per $x_2 > 0$ e $\phi_1(x_1, 0) = f(x_1)$.
Spiegare perchè risulta vero solo formalmente e studiare cosa accade con l'estensione ottenuta, per $x_2 > 0$, tramite
$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2\ (f * \rho_{x_2})(x_1) = x_2 \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{x_2}\rho\left(\frac{x_1 - y}{x_2}\right)\,dy,$$
dove $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ è l'usuale funzione usate per costruire i mollificatori e $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\rho(x\epsilon^{-1})$.

4. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcolare la norma $L^2(\mathbb{R})$ di $f * f$.
5. Risolvere il problema al contorno in due dimensioni

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } x^2 + y^2 = 4 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 8\cos^3(\theta) & \text{in } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

la soluzione è unica? Cosa si può dire se il dato di Neumann sulla circonferenza interna viene cambiato in $\frac{\partial u}{\partial n}(1, \theta) = \cos^2(\theta)$?