Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

11 luglio 2018

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Mostrare che in generale la convoluzione con una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e anche continua non produce una funzione continua.

   Sugg. considerare $f * f$

2. Sia per $0 < \alpha \leq 1$ data $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, e sia ρ un mollificatore. Mostrare che per $\epsilon \to 0$
$$\|u^2 * \rho_\epsilon - (u * \rho_\epsilon)^2\|_{L^\infty} \to 0$$
   stimandone, se possibile, l'ordine di convergenza in funzione in ϵ in termini di α.

3. a) Si consideri l^∞ lo spazio di Banach delle successioni reali limitate. Si consideri la funzione $S : l^\infty \to \mathbb{R}$ definita da
$$Sx = \limsup_{n\to\infty} x_n$$
   risulta lineare?

   b) Si consideri poi la funzione T definita da
$$Tx = \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} x_n + \frac{1}{2} \limsup_{n\to+\infty} x_n,$$
   e si determini se è lineare.

   Per il punto b) può essere utile utilizzare la successione $x_n = (n \bmod 3)$.

4. Usando l'identità
$$a_N b_N - a_M b_M = \sum_{i=M+1}^{N} a_i(b_i - b_{i-1}) + \sum_{i=M+1}^{N} b_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \qquad M < N,$$
   studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\log(n)}$$

5. Chiamato G nucleo Gaussiano
$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},$$
   (con $G = 0$ per $t < 0$) uni-dimensionale, allora $G(0, t-s)$ rappresenta la concentrazione in $x = 0$, al tempo $t > s$ di una sorgente di intensità unitaria situata in $x = 0$ all'istante $t = s$.

   Determinare, se è presente una sorgente (tipo inquinante) in $x = 0$ di intensità
$$q(t) = \begin{cases} Q \in \mathbb{R}^+ & 0 < t < T \\ 0 & t > T, \end{cases}$$
   la concentrazione nel punto $x = 0$ al tempo t e il comportamento asintotico per $t \to +\infty$.