Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

6 giugno 2018

1. Data la serie non convergente $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$, si calcoli

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-ak}.$$

In maniera analoga si provi a dare senso a $\int_0^{\infty} \sin(x) dx$ tramite

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-ax} dx.$$

Più in generale si studi per $\phi \in C^\infty([0, \infty))$, con $\phi, \phi' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ il limite

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \sin(x) \phi(ax) dx.$$

2. Si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\log|x|)^2} & \text{per } 0 < |x| < e^{-3}, \\ 0 & \text{per } x = 0 \text{ e per } e^{-3} < |x| < \pi. \end{cases}$$

3. Si consideri il problema ai valori iniziali con condizioni periodiche in $x \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_{xxxx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{ikx} & (x, t) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

e discutere, al variare di g_k , quando la soluzione risulta limitata per $t > 0$.

4. Si consideri l'operatore $L = -u_{xx} - 4u$ per $x \in (0, \pi)$. Si mostri che la corrispondente forma bilineare

$$B(u, v) = \int_0^\pi u_x v_x - 4uv dx,$$

non è definita positiva nello spazio delle funzioni nulle al bordo e a quadrato sommabile assieme alle derivate prime.

Mostrare inoltre che il problema al contorno

$$\begin{cases} -u_{xx} - 4u = \sin(2x) & x \in]0, \pi[, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

non ha soluzione (debole). In particolare usare una opportuna v per mostrare che $B(u, v) \neq \int_0^\pi uv dx$.

5. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che chiamata $f(x) = (a + bx^2) e^{-x^2/2}$ si abbia

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{2\pi} f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$