Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

14 febbraio 2018

1. Sia l^1 lo spazio delle successioni complesse con la norma $\|x\|_{l^1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Data una successione di numeri complessi $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si consideri l'operatore lineare da l^1 in se stesso
$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$$
Se ne calcoli la norma.
Si consideri poi l'operatore esponenziale
$$\mathrm{e}^{tA}x = (\mathrm{e}^{t\lambda_1}x_1, \mathrm{e}^{t\lambda_2}x_2, \dots)$$
e se ne calcoli la norma.
Può la norma $\|A\|$ essere infinita, ma al tempo stesso essere finita la norma $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ per ogni $t \geq 0$?

2. Sia
$$V := \left\{ v \in L^2(-1,1) :\ (1-x^2)^{1/2} v' \in L^2(-1,1) \right\}$$
Verificare che
$$\langle u, v\rangle_V = \int_{-1}^{1} u\, v + (1-x^2) u'\, v'\, dx$$
definisce un prodotto scalare. Studiare, per $f \in L^2(-1,1)$ il problema variazionale
$$\langle u, v\rangle_V = \int_{-1}^{1} f\, v\, dx$$
e interpretarlo in senso forte.

3. Risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno
$$\begin{cases} y u_{xx} + u_y = 0 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$
e discutere quando la soluzione sia una soluzione regolare del problema.

4. Mostrare, con la separazione delle variabili che il problema al contorno
$$\begin{cases} g(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + h(x)u \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \end{cases}$$
porta a un systema di Sturm-Liouville, se i coefficienti sono regolari e con segni determinati. Si determini la soluzione formale del problema.

5. Calolare per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ il valore dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$$

Sarà utile considerare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica di un intervallo.