Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

22 gennaio 2018

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Si può verificare che la successione $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge, se non quando $z = 1$. Studiare però il limite
$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{z^M + z^{M+1} + \cdots + z^{N-1}}{N-M}.$$
Sia poi $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice unitaria. Mostrare che
$$\lim_{N-M\to+\infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} U^n f = Pf \qquad \forall\, f \in \mathbb{C}^n,$$
dove P è il proiettore sul sottospazio invariante $H \subseteq \mathbb{C}^n$ dei vettori tali che $Uf = f$.
Sugg. Dimostrare che se $\mathbb{C}^n = H \oplus Y$, *dove* Y *è lo span dei vettori della forma* $Ug - g$.

2. Sia $0 < p < 1$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e si consideri
$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{misurabile e t.c.} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$
Mostrare che la quantità $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ non è una norma quando $0 < p < 1$.
Mostrare che però vale la diseguaglianza
$$\forall\, p \in (0,1) \qquad \|f+g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \qquad \forall\, f, g \in L^p(\Omega)$$

3. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ (non-negativa tale che $\mu(\mathbb{R}) = 1$) e si definisca la funzione $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come
$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} d\mu(x).$$
a) Mostrare che $\widehat{\mu} \in C_b(\mathbb{R})$. Si ha che $\widehat{\mu} \to 0$ per $\xi \to +\infty$?
La funzione continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice definita positiva se la matrice $A_{jk} := F(x_j - x_k)$ è definita positiva per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni scelta dei punti $x_n \in \mathbb{R}$ (con $n = 1, \ldots, N$) si ha
$$\sum_j \sum_k F(x_j - x_k)\overline{u}_j u_k \ge 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{C}^N.$$
b) Mostrare che $\widehat{\mu}$ è definita positiva.

4. Si consideri lo spazio di Hilbert $X = L^2(0,+\infty)$ e sia $A : X \to X$ definito da
$$(Au)(x) = 2u(x+1).$$
   a) Si dimostri che A è lineare e limitato e se ne calcoli la norma;
   b) Si determinino $Ker(A)$ e $Im(A)$;
   c) Si determini A^*, l'aggiunto di A.

5. Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger in n-dimensioni ($n \geq 1$) e con condizioni periodiche rispetto a tutte le variabili

$$\begin{cases} i\,u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n, \\ \\ \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{in } \mathbb{T}^n. \end{cases}$$

Sia $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, si scriva la soluzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ e si studi poi l'equazione di bilancio della norma $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Si consideri poi il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} i\,u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \\ \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si trovi una soluzione tramite la trasformata di Fourier.