# Corso di Laurea in Matematica
# Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2016

1. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $2\pi$, e tale che $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$. Mostrare che, fissati $0 < a < b < 2\pi$ si ha
$$f * \chi_{[a,b]} \in L^\infty(\mathbb{R}).$$
Mostrare inoltre che $f * \chi_{[a,b]} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R})$.
**Soluzione.** Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$|f * \chi_{[a,b]}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\chi_{[a,b]}(y)\,dy\right| \le \int_a^b |f(x-y)|\,dy \le \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt \le \|f\|_{L^2}\sqrt{2\pi},$$
dimostrando la limitatezza.
Osserviamo poi che $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$$|f * \chi_{[a,b]}(x_1) - f * \chi_{[a,b]}(x_2)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(y)(\chi_{[a,b]}(x_1 - y) - \chi_{[a,b]}(x_2 - y))\,dy\right|$$
La funzione $\chi_{[a,b]}(x_1 - y) - \chi_{[a,b]}(x_2 - y))$ è l'indicatrice della differenza simmetrica fra gli intervalli $[x_1 - b, x_1 - a]$ e $[x_2 - b, x_2 - a]$. La misura della differenza simmetrica è minore di $2|x_1 - x_2|$ e pertanto, se $|x_1 - x_2| \le 2k\pi$ (nell'altro caso non c'è nulla da dimostrare) si ha
$$\begin{aligned}&|f * \chi_{[a,b]}(x_1) - f * \chi_{[a,b]}(x_2)| \\ &\le \int_{-4\pi}^{4\pi} |f(y)|\;|\chi_{[a,b]}(x_1 - y) - \chi_{[a,b]}(x_2 - y)|\,dy \le c\|f\|_{L^2}|x_1 - x_2|^{1/2},\end{aligned}$$
grazie alla diseguaglianza di Schwarz.

2. Sia $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo 1. Sia $y_n(t)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_n(t) = f(n\,t)\,y_n(t) \\ \\ y_n(0) = 1. \end{cases}$$
Calcolare, se esiste,
$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$
**Soluzione.** La soluzione del problema di Cauchy è
$$y_n(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t f(ns)\,ds} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\int_0^{nt} f(\tau)\,d\tau},$$
che è unica grazie al teorema di Cauchy Lipschitz. Inoltre, se $M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ si ha
$$|y_n(t)| \le \mathrm{e}^{MT} \qquad |y'(t)| \le M\,\mathrm{e}^{MT}$$
e quindi la successione $\{y_n\}$ risulta equilimitata ed equicontinua. Dal teorema di Ascoli-Arzelà possiamo estrarre $n_k$ tale che $y_{n_k}$ è convergente a $y$ nella norma del sup.
Osserviamo ora che, grazie alla 1-periodicità di $f$, si ha
$$\int_0^{nt} f(\tau)\,d\tau = \int_0^{[nt]} f(\tau)\,d\tau + \int_{[nt]}^{nt} f(\tau)\,d\tau = [nt]\int_0^1 f(\tau)\,d\tau + \int_{[nt]}^{nt} f(\tau)\,d\tau.$$

Pertanto, dato che per ogni $t > 0$ si ha $0 \leq nt - [nt] \leq 1$ e anche

$$t = \frac{nt}{n} = \frac{[nt]}{n} + \frac{nt - [nt]}{n},$$

ne deriva che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]}{n} = t.$$

Pertanto, dato che $\left|\int_{[nt]}^{nt} f(\tau)\, d\tau\right| \leq \int_0^1 |f(\tau)|\, d\tau \leq M$, si ha

$$\frac{1}{n}\int_0^{nt} f(\tau)\, d\tau = \frac{[nt]}{n}\int_0^1 f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{n}\int_{[nt]}^{nt} f(\tau)\, d\tau \longrightarrow t\int_0^1 f(\tau)\, dt$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = \mathrm{e}^{t\, f\, f}$$

3. Si consideri per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la successione di funzioni $\{f_n\}$ definite come

$$f_n(x) := \mathrm{sgn}[\sin(2^n \pi x)], \qquad \text{for } x \in [0,1].$$

Mostrare che $\{f_n\}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$.
Discutere se $\{f_n\}$ è un sistema completo.
*Sugg.: Può essere utile considerare la funzione*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1/4] \cup [3/4,1] \\ \\ -1 & x \in ]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

**Soluzione.** Dalla definizione si ha che $f_0(x) = 1$ e per $n \geq 1$ la funzione $f_n$ è la restrizione a $[0,1]$ della funzione periodica di periodo $T_n = 2^{1-n}$ tale che

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2^n} \\ \\ -1 & \text{se } \dfrac{1}{2^n} < x < \dfrac{1}{2^{n-1}}. \end{cases}$$

Pertanto ovviamente $\int_0^1 |f_n(x)|^2 = 1$ e inoltre $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$, dato che

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \int_{2k/2^n}^{(2k+2)/2^n} f_n(x)\, dx = 0$$

dato che la funzione $f_n$ ha media nulla sul periodo.
Osserviamo ora che se $m > n$ si ha

$$\int_0^1 f_n(x) f_m(x)\, dx = 2^{n-1}\left[\int_0^{1/2^n} f_n(x) f_m(x)\, dx + \int_{1/2^n}^{2/2^n} f_n(x) f_m(x)\, dx\right]$$

$$= 2^{n-1}\left[\int_0^{1/2^n} f_m(x)\, dx - \int_{1/2^n}^{2/2^n} f_m(x)\, dx\right]$$

dato che per la periodicità della $f_n$ e della $f_m$ (basta calcolare l'integrale su un periodo della $f_n$, dato che i periodi sono commensurabili.

Osserviamo ora che

$$\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f_m(x)\,dx = \sum_{j=2^{m-n}k}^{2^{m-n}k+2^{m-n}-2} \int_{j/2^m}^{(j+2)/2^m} f_m(x)\,dx = 0$$

essendo integrali fatti su di un periodo completo della $f_m$.

Con le stesse osservazioni si ha che

$$\int_0^1 f_n(x)\phi(x)\,dx = 0$$

e siccome $\phi \neq 0$, il sistema non è completo.

4. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Dimostrare che se $u > 0$, allora $u$ è costante.
*Sugg.: Usare la proprietà della media sui volumi*

Il risultato è vero se $u$ è armonica e positiva con $u : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$?
**Soluzione.** Usando la formula della media per $R > |x|$ si ha

$$u(x) - u(0) = \frac{n}{\omega_n R^n}\left[\int_{B(x,R)} u\,dx - \int_{B(0,R)} u\,dx\right].$$

Siccome gli integrali su $B(x,R)\cap B(0,R)$ si cancellano si ha

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(0)| &\le \frac{n}{\omega_n R^n}\left|\int_{B(0,R+|x|)\backslash B(0,R-|x|)} u\,dx\right| \\
&= \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B(0,R+|x|)\backslash B(0,R-|x|)} u\,dx \\
&= \frac{n}{\omega_n R^n}\left[\int_{B(0,R+|x|)} u\,dx - \int_{B(0,R-|x|)} u\,dx\right] \\
&= u(0)\frac{(R+|x|)^n - (R-|x|)^n}{R^n} \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty,
\end{aligned}$$

quindi $u(x) \equiv u(0)$.

La funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, per $n > 2$, è positiva, armonica in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e non costante.

Il caso $n = 2$ risulta diverso: se $V$ è positiva, armonica in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, allora la funzione $z \mapsto V(\mathrm{e}^z)$ risulta positiva e armonica su $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ e quindi risulta costante.

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{txx} - \beta^2 u_{xx} = 0 & (t,x) \in ]0,T[\times]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in ]0,T[, \\ u(0,x) = \sin^3(x) & x \in ]0,\pi[, \end{cases}$$

dove $T \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \le 1$ e $0 < \beta \le 1$. Si può caratterizzare il comportamento per $t \to +\infty$ della soluzione?
**Soluzione.** Osserviamo inanzitutto che usando le formule di Eulero si ha

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{3}{8}i\mathrm{e}^{-ix} + \frac{3}{8}i\mathrm{e}^{ix} + \frac{1}{8}i\mathrm{e}^{-3ix} - \frac{1}{8}i\mathrm{e}^{3ix} = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

e quindi il dato iniziale può essere scritto come

$$\sin^3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

La soluzione va cercata della forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin(kx),$$

e quindi vanno risolti i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} b_k'(t) + \alpha^2 k^2 b_k'(t) + \beta^2 k^2 b_k(t) = 0 \\ \quad b_k(0) = b_k = 0 \quad \text{per } k \neq 1,3. \end{cases}$$

quindi $b_k(t) \equiv 0$ se $k \neq 1,3$, mentre

$$b_1(t) = b_1 \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}t} = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}t} \qquad \text{e} \qquad b_3(t) = b_3 \mathrm{e}^{-\frac{9\beta^2}{1+9\alpha^2}t} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{9\beta^2}{1+9\alpha^2}t}$$

quindi la soluzione risulta

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}t}\sin(x) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{9\beta^2}{1+9\alpha^2}t}\sin(3x)$$

e inoltre

$$|u(t,x)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

dove

$$\lambda = \frac{\beta^2}{1+\alpha^2} := \min\left\{\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}, \frac{9\beta^2}{1+9\alpha^2}\right\}$$