Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

25 gennaio 2017

1. a) La funzione $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ è periodica?

   b) La funzione di classe C^1 definita come $g(x) := \cos(x^2)$ è periodica?

   c) Sia data una funzione h, non necessariamente derivabile, periodica di periodo 2π. La funzione $h(x^2)$ risulta periodica?

   Soluzione. a) Dato che $f(0) = 2$, se la funzione fosse periodica ci dovrebbe essere $T > 0$ tale che $f(T) = 2$, ma dato che il coseno è sempre minore o uguale a 1, ciò accade solo se $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$. Ricordando che il coseno vale 1 se e solo se l'argomento vale $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ si ottiene che

$$T = 2m\pi \qquad \text{e} \qquad \sqrt{2}T = 2n\pi \quad \text{per qualche } m, n \in \mathbb{N}$$

   e dunque uguagliando si ha $2m\pi = \sqrt{2}n\pi$ per qualche $m, n \in \mathbb{N}$, che implicherebbe

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2} \qquad \text{per qualche } m, n \in \mathbb{N},$$

   assurdo.

   Per il caso b), è sufficiente derivare $g(x)$. Si ottiene $g'(x) = -2x\sin(x^2)$, che non è periodica (perchè ad esempio perché i massimi locali hanno valori crescenti per $x > 0$). Ma se $g(x)$ fosse T-periodica, lo dovrebbe essere anche la sua derivata. Quindi, non esiste T tale che $g(x)$ sia T-periodica.

   c) Se $h(x^2)$ fosse T periodica si avrebbe che $h(0) = h(T^2)$ e quindi, dato che h è 2π-periodica

$$T = \sqrt{2k\pi} \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

   Osserviamo ora che, la T-periodicità implica anche che $h(1) = h((1+T)^2)$. Pertanto, dato che $h(x)$ è 2π-periodica

$$(1+T)^2 = 1 + 2T + T^2 = 1 + 2m\pi \qquad \text{per qualche } m \in \mathbb{Z}.$$

   e quindi sostituendo $T = \sqrt{2k\pi}$ si ha

$$2\sqrt{2k\pi} + 2k\pi = 2m\pi,$$

   da cui

$$\pi = \frac{2k}{(m-k)^2} \in \mathbb{Q},$$

   assurdo.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{8}{(1+x^2)(9+x^2)}.$$

   Sugg. Calcolare preliminarmente la trasformata di $\mathrm{e}^{-|y|}$

   Soluzione. La trasformata di $\mathrm{e}^{-|y|}$ si calcola esplicitamente

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|y|})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|y|}\mathrm{e}^{-iy\omega}\,dy = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{-iy\omega}\,dy + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-iy\omega}\,dy = \frac{2}{\omega^2+1}.$$

Essendo sia $e^{-|y|}$ che la sua trasformata funzioni $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, vale la formula di inversione, pertanto

$$e^{-|y|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\omega^2+1} e^{iy\omega}\, d\omega,$$

da cui, usando la parità di entrambe le funzioni e un cambio di variabile, si ottiene

$$\mathcal{F}(\frac{1}{\omega^2+1}) = \pi e^{-|y|}$$

Osserviamo ora che

$$f(x) = \frac{8}{(1+x^2)(9+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{9+x^2},$$

e pertanto

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \pi e^{-|\xi|} - \pi \frac{1}{3} e^{-3|\xi|}.$$

3. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|^{2/3}} & |x| > 1 \end{cases}$$

Si discuta, tenendo conto del decadimento all'infinito di f e in particolare se $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * f \in L^2(\mathbb{R})$ e se $f * f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sugg. "Spezzare" l'integrale che definisce la convoluzione usando $-x/2$, $x/2$, e $3x/2$

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che $f \in L^2(\mathbb{R})$, ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$, quindi a-priori non possiamo dire che $f*f$ risulta ben definita. Studiamo il comportamento, per $x > 0$ "grande", della funzione non-negative $f(u)f(x-u)$ che è l'integranda in $f * f$.

Per $u \le -x/2$ si ha che

$$f(u) \sim |u|^{-2/3} \qquad f(x-u) \sim |u|^{-2/3}$$

quindi l'integrando è dell'ordine di $|u|^{-4/3}$, e pertanto

$$\int_{-\infty}^{-x/2} f(u)f(x-u)\, du \sim x^{-1/3}.$$

Lo stesso accade anche per $x \ge 3x/2$ invertendo i ruoli di $f(u)$ e di $f(x-u)$.

Per $-x/2 \le u \le x/2$ si ha invece $f(x-u) \sim x^{-2/3}$ (che esce dall'integrale) e quindi $\int_{-x/2}^{x/2} f(u)\, du \sim x^{1/3}$ e quindi

$$\int_{-x/2}^{x/2} f(u)f(x-u)\, du \sim x^{-1/3}.$$

Per $x/2 \le u \le 3x/2$ la situazione è la stessa, ma con i ruoli di $f(u)$ e di $f(x-u)$ invertiti.

Pertanto $f * f \sim x^{-1/3}$ per x grande e quindi l'integrale su $[1, +\infty[$ diverge. Si ha infine, ragionando sul quadrato anche

$$f * f \notin L^1(\mathbb{R}) \qquad f * f \notin L^2(\mathbb{R}).$$

4. Sia $\mathbf{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione armonica (dove il Laplaciano di un vettore è definito come il Laplaciano componente per componente). Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto (x \cdot \nabla)\, \mathbf{u}(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)$$

è armonica.

Soluzione. Calcoliamo direttamente il laplaciano della funzione regolare $(x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$

$$\Delta\big[(x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}\big] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\big[(x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}\big].$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big[(x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}\big] = \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x) = \sum_i \delta_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x) + x_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

pertanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x) = \sum_i \delta_{ij}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \delta_{ij}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x) + x_i \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j^2}(x),$$

e sommando anche su $j = 1, \ldots, n$

$$\Delta\big[(x \cdot \nabla)\,\mathbf{u}\big] = 2\sum_{i,j} \delta_{ij}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta \mathbf{u}(x)$$

$$= (2 + x \cdot \nabla)\,\Delta \mathbf{u}(x) = 0.$$

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & x \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = \sin(x) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

Caratterizzare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione.

Soluzione Cerchiamo una funzione che risolva il problema al contorno

$$-U_{xx} = x \qquad x \in]0,\pi[$$

$$U(0) = U(\pi) = 0.$$

Si tratta di una equazione lineare a coefficienti costanti e usando il metodo degli annichilatori la soluzione deve essere cercata come polinomio di grado due: $U(x) = \sum_{m=0}^{2} a_m x^m$. Sostituendo si trova facilmente

$$U(x) = \frac{1}{6}\left(\pi^2 x - x^3\right)$$

Considerando quindi la nuova variabile $v(t,x) := u(t,x) - U(x)$ si ha che

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & x \in]0,\pi[\times]0,T[, \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 & t \in]0,T[, \\ v(0,x) = \sin(x) - \dfrac{1}{6}\left(\pi^2 x - x^3\right) & x \in]0,\pi[, \end{cases}$$

Con alcune integrazioni per parti si ottiene che

$$-\frac{1}{6}\left(\pi^2 x - x^3\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx), \qquad \text{con } c_k = 2\frac{\cos(\pi k)}{k^3}.$$

In ogni caso, la soluzione v risulta essere

$$v(t,x) = (1 + c_1)\sin(x)\mathrm{e}^{-t} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \sin(kx)\mathrm{e}^{-k^2 t}$$

e quindi $v \to 0$ per $t \to +\infty$ e pertanto

$$u(t,x) \to U(x) = \frac{1}{6}\left(\pi^2 x - x^3\right) \qquad \text{per } t \to +\infty.$$