Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

12 luglio 2017

1. Sia $\{a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ una matrice infinita di numeri reali tali che

    i) $\lim_{m\to+\infty} a_{mn} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

    ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$;

    iii) $\exists\, C \in \mathbb{R} :\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \le C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.

    Mostrare che:

    (a) l'applicazione A

    $$\{x_k\} \mapsto \{A_k(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n$$

    è lineare e continua nello spazio l^∞ delle successione limitate.

    (b) Se $\lim x_n = x$ allora $\lim_{m\to+\infty} A_m(x) = x$.

    (c) Il punto b) vale anche se la condizione $ii)$ viene sostituita da $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$.

    Soluzione. a) Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale la diseguaglianza

    $$|A_k(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}|\,|x_n| \le \sup_n |x_n| \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}| = C \sup_n |x_n|$$

    quindi $\|A_k(x)\|_\infty \le C\|x_n\|_\infty$ e la mappa è ovviamente lineare.

    b) Usiamo $ii)$ per scrivere

    $$A_k(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n - x \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(x_n - x),$$

    e quindi

    $$|A_k(x) - x| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}|\,|x_n - x| \le \sum_{n=1}^{N} |a_{kn}|\,|x_n - x| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|\,|x_n - x|.$$

    Per la definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x| < \epsilon$, per ogni $n > N$ e si ha dunque $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}|\,|x_n - x| \le \epsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{kn}| \le \epsilon$. Il primo termine ha invece solo un numero finito di termini e usando i) possiamo concludere che $|a_{kn}|\,|x_n - x| \to 0$ per $k \to +\infty$, dato che $|x_n - x|$ è limitato. Quindi per $\epsilon > 0$ arbitrario e k sufficientemente grande si ha

    $$|A_k(x) - x| \le 2\epsilon.$$

    Per il punto c) basta osservare che

    $$A_k(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_{kn} x_n - a_{kn} x + a_{kn} x - x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(x_n - x) + x\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\Big) - 1\Big],$$

    e il primo termine si annulla esattamente come nel caso precedente, mentre il secondo tende a zero per $k \to +\infty$, per l'ipotesi fatta.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log(x))^2} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si dimostri che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si consideri poi $f_\epsilon(x) = (\rho_\epsilon * f)(x)$ la mollificata con un nucleo di Friederichs a supporto compatto. e si definisca

$$F(x) := \sup_{0<\epsilon<1} f_\epsilon(x).$$

Si dimostri che $F(x) \notin L^1(\mathbb{R})$.
Sugg. Si usi la diseguaglianza $F(x) := \sup_{0<\epsilon<1}(\rho_\epsilon * f)(x) \geq (\rho_{2x} * f)(x)$

Soluzione La funzione f è nonnegativa e inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x(\log(x))^2} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{1/2} \frac{1}{x(\log(x))^2} = \lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{\log(x)}\bigg|_a^{1/2} = \frac{1}{\log(2)},$$

quindi è integrabile, anche secondo Riemann.

Consideriamo al solito

$$\rho(x) = \begin{cases} C^{-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1, \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

con $C = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}}\,dx$. Allora

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

e si ha che

$$\rho_\epsilon(x) \geq \phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\epsilon} & \text{se } |x| < \epsilon/2, \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq \epsilon/2, \end{cases}$$

dove $\delta := \rho(1/2)$. (Dato che ρ è pari e non-crescente su $\mathbb{R}^+$).

Ricordando che $f \geq 0$ abbiamo quindi che

$$f_\epsilon(x) = (\rho_\epsilon * f)(x) \geq (\phi_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x-y)f(y)\,dy = \frac{\delta}{\epsilon}\int_{|x-y|<\epsilon/2} f(y)\,dy.$$

Pertanto

$$F(x) \geq f_{2x}(x) = \frac{\delta}{2x}\int_{|x-y|<x} f(y)\,dy = \frac{\delta}{2x}\int_0^{2x} \frac{1}{y(\log(y))^2}\,dy = -\frac{\delta}{2x\log(2x)} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

3. È ben noto che le soluzioni non banali di $y'' + y = 0$ hanno al più un numero finito di zeri in qualsiasi intervallo finito. Dimostrare che se $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e

$$q(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

allora per ogni intervallo finito $[a, b]$, ogni soluzione non banale di

$$z''(x) + q(x)\,z(x) = 0,$$

ha al più un numero finito di zeri in $[a, b]$.

Soluzione. Assumiamo per assurdo che ci siano infiniti zeri (distinti) $x_n \in [a,b]$. Allora esiste $x_0 \in [a,b]$ e una sottosuccessione (chiamata ancora $\{x_n\}$) tale che $x_n \to x_0$. Dato che $z \in C^1[a,b]$ si ha

$$z(x_0) = \lim_n z(x_n) = 0,$$

$$z'(x_0) = \lim_n \frac{z(x_n) - z(x_0}{x_n - x_0} = 0,$$

e quindi z dovrebbe soddisfare il problema di Cauchy per equazione lineare a coefficienti continui e non degeneri

$$\begin{cases} z''(x) + q(x)\, z(x) = 0 \qquad x \in (a,b), \\ z(x_0) = 0, \\ z'(x_0) = 0, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $y \equiv 0$. Assurdo.

4. Sia $(H, \|\,.\,\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{x_n\} \subset H$ un sistema ortonormale. Dimostrare che $x_n \rightharpoonup 0$, cioè che

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, h) = 0 \qquad \forall\, h \in H.$$

Sia poi dato $x \in H$ tale the $\|x\|_H = \frac{1}{2}$. Costruire una successione di elementi $y_n \in H$ tali che

$$\|y_n\| = 1 \qquad \text{e} \qquad y_n \rightharpoonup x \quad (\text{ cioè } \lim_{n\to+\infty} (y_n, h) = (x,h) \qquad \forall\, h \in H).$$

Soluzione Dalla dieseguaglianza di Bessel abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, h)|^2 \leq \|h\|_X^2,$$

e quindi essendo termini di una serie convergente si ha $(x_n, h) \to 0$.

Per il secondo punto possiamo osservare che se $\{x_n\}$ è sistema ortonormale, allora la successione $z_n = x + x_n$ è tale che

$$(z_n, h) = (x + x_n, h) = (x,h) + (x_n, h) \to (x,h)$$

Quindi la successione z_n è una candidata, solo che non abbiamo nessun controllo sulla norma. Consideriamo quindi il sottospazio chiuso

$$H_0 = \{h \in H : \; (h, x) = 0\}\,,$$

e sia w_n un sistema ortonormale in H_0 (ottenuto per esempio con Gram-Schmidt). Si ha dunque

$$(x + w_n, h) \to (x, h) \qquad \text{e} \qquad \|x + w_n\|^2 = \|x\|^2 + \|w_n\|^2 = \frac{1}{4} + 1.$$

Per costruire la successione richiesta basta quindi considerare $z_n = x + \frac{\sqrt{3}}{2} w_n$. Per ogni $h \in H$ si ha infatti $(\frac{\sqrt{3}}{2} w_n, h) = \frac{\sqrt{3}}{2}(w_n, h) \to 0$ e quindi

$$(z_n, h) = (x + \frac{\sqrt{3}}{2} w_n, h) \to (x, h) \qquad \text{e} \qquad \|x + w_n\|^2 = \|x\|^2 + \frac{3}{4}\|w_n\|^2 = 1.$$

5. Risolvere, per $U \in \mathbb{R}$, con la separazione delle variabili il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{in } 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0, \\ u_x(\pi,t) = U & t > 0. \end{cases}$$

Discutere poi se per $U \neq 0$ può esistere una soluzione stazionaria $u_\infty = u_\infty(x)$.

Soluzione. Per usare il metodo di separazione della variabili, è meglio prima riportarsi a condizioni omogenee per esempio considerando

$$v(x,t) = u(x,t) - U\frac{x^2}{2\pi},$$

per cui v risolve

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = \dfrac{U}{\pi} & \text{in } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ v(x,0) = -\dfrac{Ux^2}{2\pi} & \text{in } 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0, \\ u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Essendo problema di Neumann omogeneo, cerchiamo soluzioni del tipo

$$v(x,t) = \frac{c_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\cos(kx),$$

e determiniamo i coefficienti in modo che

$$v_t - v_{xx} = \frac{c_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k'(t) + k^2 c_k)\cos(kx) = \frac{U}{\pi},$$

$$v(x,0) = \frac{c_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0)\cos(kx) = -\frac{Ux^2}{2\pi}.$$

Sviluppando in serie di coseni si ha

$$\frac{Ux^2}{2\pi} = \frac{U}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\right]$$

e pertanto la soluzione risulta, calcolando i coefficienti c_k e ricordando che $u = v + U\frac{x^2}{2\pi}$

$$u(x,t) = \frac{U}{\pi}t + U\frac{x^2}{2\pi} - \frac{U\pi}{6} + \frac{2U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\mathrm{e}^{-k^2 t}\cos(kx).$$

Osserviamo che una soluzione stazionaria $u_\infty(x)$ dovrebbe risolvere

$$\begin{cases} u_\infty''(x) = 0 & 0 < x < \pi, \\ u_\infty'(0) = 0, \\ u_\infty(\pi) = U, \end{cases}$$

e tale problema non ha soluzione perchè la derivata seconda nulla implica che u_∞ è lineare e quindi $u' = cost.$