Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

21 giugno 2017

1. Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale convergente a $s \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n s_n = s. \tag{1}$$

Trovare una successione tale che $\lim_n s_n$ non esiste, ma il limite in (1) esiste.

Data una funzione f periodica di periodo 2π e sia $S_n(f)(\theta)$ la sua serie parziale di Fourier; dimostrare che

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) r^{|n|} \mathrm{e}^{in\theta} \qquad 0 \le r < 1.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n s = \frac{s}{1-r} \qquad \text{se } -1 < r < 1.$$

Pertanto se $|r| < 1$

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n s_n - s = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n (s_n - s).$$

Per la definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|s_n - s| < \epsilon$ per ogni $n > N$, quindi

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n (s_n - s) = (1-r)\sum_{n=0}^{N-1} r^n (s_n - s) + (1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n (s_n - s).$$

Il primo termine è una somma finita, e dato che s_n è convergente, è limitata, quindi

$$(1-r)\left|\sum_{n=0}^{N-1} r^n (s_n - s)\right| \le (1-r)N2C \to 0 \quad \text{per } r \to 1,$$

mentre il secondo termine

$$\left|(1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n (s_n - s)\right| \le (1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n |s_n - s| \le \epsilon(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \epsilon,$$

e quindi la tesi.

Come esempio basta prendere $s_n = (-1)^n$ che non converge, ma

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n (-1)^n = \lim_{r\to 1^-}\frac{1-r}{1+r} = 0.$$

Per verificare la formula, osserviamo che –trascurando i problemi di convergenza– si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ik\theta} =$$

$$= \ldots \widehat{f}(-2)\sum_{n=-2}^{-\infty} r^n \mathrm{e}^{-2i\theta} + \widehat{f}(-1)\sum_{n=-1}^{-\infty} r^n \mathrm{e}^{-i\theta}\widehat{f}(0)\sum_{n=0}^{\infty} r^n + \widehat{f}(1)\sum_{n=1}^{\infty} r^n \mathrm{e}^{i\theta} + \widehat{f}(2)\sum_{n=2}^{\infty} r^n \mathrm{e}^{2i\theta} \ldots$$

e osservando che

$$\sum_{j=k}^{\infty} r^j = \sum_{j=0}^{\infty} r^j - \sum_{j=0}^{k-1} r^j = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^k}{1-r} = \frac{r^k}{1-r}$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \frac{r^k}{1-r} \mathrm{e}^{inx},$$

da cui la tesi.

2. Sia $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ per qualche $R > 0$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che per ogni $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che rot $\Phi = 0$ la formula

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \Phi(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}\, dt$$

definisce una funzione di classe $C^{k+1}(\Omega)$ che risolve $\Phi = \nabla\psi$.

Data una $\Phi \in (C^k(\Omega))^3$ tale che div $\Phi = 0$ trovare una formula analoga che definisce una Ψ regolare che risolve

$$\Phi = \text{rot } \Psi.$$

Soluzione. Il fatto che la funzione ψ sia di classe C^{k+1} si verifica per induzione derivando ripetutamente la formula. In particolare, osserviamo che rotore nullo significa che $\partial_m \Phi^k = \partial_k \Phi^m$, per $k \neq m$. Pertanto, derivando sotto il segno di integrale si ha (con la convenzione della somma sugli indici ripetuti)

$$\begin{aligned}
\partial_j \psi(x) &= \int_0^1 \partial_j \left[\Phi^k(t\mathbf{x}) x_k\right] dt \\
&= \int_0^1 \partial_m \Phi^k(t\mathbf{x}) \partial_j (t x_m) x_k + \Phi^k(t\mathbf{x}) \partial_j x_k \, dt \\
&= \int_0^1 \partial_k \Phi^m(t\mathbf{x}) t \delta_{jm} x_k + \Phi^k(t\mathbf{x}) \delta_{jk} \, dt \\
&= \int_0^1 t\, \partial_k \Phi^j(t\mathbf{x}) x_k + \Phi^j(t\mathbf{x}) \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t\, \Phi^j(t\mathbf{x})\right] dt = \Phi^j(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Nel secondo caso la formula cercata è

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\, \Phi(t\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x}.$$

Infatti scrivendola in componenti si ha

$$\Psi^k(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\, \epsilon_{klm} \Phi^l(t\mathbf{x}) x_m,$$

dove ϵ_{klm} è il tensore totalmente antisimmetrico di Ricci tale che $(a \wedge b)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ e $(\text{rot } f)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j f_k$

Pertanto, derivando e usando che div $\Phi = \partial_j \Phi^j = 0$ si ha che

$$
\begin{aligned}
(\text{rot } \Psi)^i = \epsilon_{ijk}\partial_j \Psi^k(\mathbf{x}) &= \int_0^1 t\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\left[\Phi^l(t\mathbf{x})x_m\right] dt \\
&= \int_0^1 t\,\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\left[t\partial_j\Phi^l(t\mathbf{x})x_m + \Phi^l(t\mathbf{x})\delta_{jm}\right] dt \\
&= \int_0^1 t\,(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\left[t\partial_j\Phi^l(t\mathbf{x})x_m + \Phi^l(t\mathbf{x})\delta_{jm}\right] dt \\
&= \int_0^1 t^2\partial_j\Phi^i(t\mathbf{x})x_j + 3t\Phi^i(t\mathbf{x}) - t^2 x_i\partial_j\Phi^j(t\mathbf{x}) - t\Phi^i(t\mathbf{x})\, dt \\
&= \int_0^1 t^2\partial_j\Phi^i(t\mathbf{x})x_j + 2t\Phi^i(t\mathbf{x})\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^2\Phi^i(t\mathbf{x})\right] dt = \Phi^i(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

3. Dimostrare che per $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema al contorno

$$
\begin{cases}
-u''(x) + u(x) = \lambda\, < \delta, u > \qquad x \in]-1,1[\\
\\
u(-1) = u(1) = 0
\end{cases}
$$

ammette sempre una soluzione. Inoltre esiste uno e uno solo $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che ne ammette due distinte. (Con il simbolo δ si denota la delta di Dirac centrata in $x_0 = 0$).

Soluzione. L'equazione da risolvere è

$$-u''(x) + u(x) = \lambda\, u(0)$$

con condizioni nulle di Dirichlet agli estremi. Ovviamente $u \equiv 0$ è sempre soluzione, per ogni λ.

Per capire in che caso esistano soluzioni non nulle cominciamo con studiare il problema (con il riscalamento $\phi(x) = u(x)/\lambda u(0)$)

$$
\begin{cases}
-\phi''(x) + \phi(x) = 1 \qquad x \in]-1,1[\\
\\
\phi(-1) = \phi(1) = 0
\end{cases}
$$

che ha come unica soluzione (tramite calcoli espliciti)

$$\phi(x) = 1 - \mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^2} = 1 - 2\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^2}\cosh(x).$$

Inoltre $\phi(0) = \frac{(1-\mathrm{e})^2}{1+\mathrm{e}^2}$. Osserviamo che $\lambda = 0$, per cui il ragionamento non sarebbe valido, produce in ogni caso solo la soluzione nulla.

Quindi la soluzione u è un multiplo della ϕ, cioè $u(x) = c\,\phi(x)$, pertanto imponendo che la u risolva il problema e sostituendo si ha

$$\lambda\, c\,\phi(0) = \lambda\, u(0) = -u'' + u = -(c\,\phi)'' + c\,\phi = c,$$

e ciò è possibile se e solo se

$$\lambda\, c\,\phi(0) = c \;\leftrightarrow\; \lambda\frac{(1-\mathrm{e})^2}{1+\mathrm{e}^2} = 1,$$

quindi il problema ha soluzione se e solo se $\lambda = \frac{1+\mathrm{e}^2}{(1-\mathrm{e})^2}$ e in tal caso $u(x) = -\frac{1+\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^2} + \frac{2\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}\cosh(x) \not\equiv 0$.

4. Sia $(H, \|\,.\,\|_H)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\{u_n\} \subset H$ un sistema ortonormale completo. Sia $\{v_n\} \subset H$ un sistema ortonormale tale che

$$\|u_n - v_n\|_H \leq \frac{1}{2^{n+2}} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrare che anche $\{v_n\}$ è completo.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che $\{v_n\}$ non sia completo, allora esiste $0 \neq x \in H$ tale che $< x, v_n >= 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha pertanto, dato che $\{u_n\}$ è ortonormale e completo

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} < x, u_n >^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} < x, u_n - v_n >^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x\|^2 \|u_n - v_n\|_H^2 \leq \|x\|_H^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+2}},$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2}\|x\|_H^2 \leq 0,$$

che è assurdo, dato che x non è nullo.

5. Sia dato $r_0 \in (0,1)$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'anello

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ r_0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}.$$

Si risolva il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{se } x^2+y^2 = r_0^2 \\ u = f(\theta) & \text{se } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

con $f(\theta)$ regolare e 2π-periodica.

Soluzione. Passando alle coordinate polari e cercando la soluzione separando la variabili $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ e impoendo la 2π-periodicità in θ si arriva alle equazioni

$$\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \qquad R''(\rho) + \frac{R'(\rho)}{\rho} - n^2\frac{R(\rho)}{\rho^2} = 0,$$

e il caso $n = 0$ va trattato a parte. Per $n \neq 0$ si ha che $R(\rho) = a\rho^n + b\rho^{-n}$, mentre per $n = 0$ si ha che $R(\rho) = c + d\log(\rho)$.

Dato che $0 \notin \Omega$, la soluzione logaritmica e quelle con esponente negativo non vanno scartate (non ci sono problemi di divergenza per $\rho \to 0^+$ e quindi la soluzione sarà della forma

$$u(\rho,\theta) = c + d\log(\rho) + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})\mathrm{e}^{in\theta}.$$

Se la funzione f è sviluppabile in serie di Fourier $f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\mathrm{e}^{in\theta}$ si ha, imponendo le condizioni al contorno,

$$u(\rho,\theta) = c_0\frac{\log(r_0) - \log(\rho)}{\log(r_0)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_n\left(\frac{\rho^n}{1-r_0^2} - \frac{r_0^{2n}}{1-r_0^{2n}}\rho^{-n}\right)\mathrm{e}^{in\theta}.$$