Corso di Laurea in Matematica
Prova di Analisi Matematica 3

15 febbraio 2017

1. Studiare la convergenza della serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

e calcolarne poi la somma per $x = \pi/3$.

Soluzione. La serie converge totalmente, dato che

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}.$$

Per calcolare la somma osserviamo che, tramite le formule di Eulero, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{2^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{ix}/2} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-ix}/2} - 2 \right],$$

dato che sono delle progressioni geometriche di argomento $\mathrm{e}^{\pm ix}/2$. Sviluppando i calcoli e tornando alle espressione trigonometriche si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{2\cos(x) - 1}{5 - 4\cos(x)},$$

e pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = \frac{2\cos(\pi/3) - 1}{5 - 4\cos(\pi/3)} = 0.$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx.$$

Soluzione. Scrivendo l'integrale I come

$$I = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx$$

e col cambio di variabile $y = 1/x$ si ottiene rispettivamente

$$I = \int_{-\infty}^{0} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\, dx$$

$$= \int_{0}^{-\infty} f\big(\frac{1}{y} - y\big)\big(-\frac{1}{y^2}\big)\, dy + \int_{+\infty}^{0} f\big(\frac{1}{y} - y\big)\big(-\frac{1}{y^2}\big)\, dy$$

e con l'ulteriore sostituzione $-y = z$ si ha poi

$$= \int_{-\infty}^{0} f\big(z - \frac{1}{z}\big)\frac{1}{z^2}\, dz + \int_{0}^{+\infty} f\big(z - \frac{1}{z}\big)\frac{1}{z^2}\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\frac{1}{x^2}\, dx.$$

Pertanto scrivendo l'integrale I come

$$I = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)\,dx,$$

con il cambio di variabile $t = x - \frac{1}{x}$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{0} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)\,dx = \int_{0}^{+\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$$

da cui la tesi.

Al risultato si poteva arrivare anche ragionando sulle funzioni semplici e mostrando che $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x - 1/x)\,dx$.

3. Si consideri l'equazione delle onde con condizioni di Neumann omogenee e dove tutti i dati sono a media nulla su $[0, \pi]$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,\pi), \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,\pi), \\ u_t(0,x) = u_1(x) & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

e si scriva la soluzione in termini di u_0 e u_1 tali che

$$\int_0^\pi |u_0'(x)|^2\,dx = \|u_0\|_V^2 < \infty \qquad \int_0^\pi |u_1(x)|^2\,dx = \|u_1\|_H^2 < \infty.$$

Definita $E_0 := \frac{1}{2}\Big(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^\pi \|u_x(0,x)\|^2 + \int_0^\pi \|u_t(0,x)\|^2\Big)$ si mostri che se $T \geq 2\pi$ esistono c_1, $c_2 > 0$ tali che

$$c_1 E_0 \leq \int_0^T |u_t(s,0)|^2\,ds \leq c_2 E_0.$$

Soluzione. Dato che la soluzione deve avere la derivata rispetto a x che si annulla agli estremi, la soluzione va cercata della forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \cos(kx)$$

e imponendo le condizioni iniziali, (la somma parte da 1 per la media nulla)

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx) \qquad \text{e} \qquad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kx),$$

si ha

$$a_k = c_k \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{d_k}{k}.$$

Calcolando ora $\|u_1\|_H^2$ si ha

$$\|u_1\|_H^2 = \int_0^\pi |u_t(0,x)|^2\,dx = \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(kx)\right|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 \int_0^\pi \cos^2(kx)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2.$$

Allo stesso modo

$$\|u_0\|_V^2 = \int_0^\pi |u_x(0,x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty k^2 a_k^2.$$

e quindi

$$E_0 = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^\infty k^2(a_k^2 + b_k^2).$$

Ora, per ogni $M \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^{2M\pi} |u_t(s,0)|^2\,ds = \sum_{k=1}^\infty k^2 \int_0^{2M\pi} a_k^2 \sin^2(ks) + b_k^2 \cos^2(ks)\,ds = M\pi \sum_{k=1}^\infty k^2(a_k^2+b_k^2) = 4ME_0.$$

Fissato $T \geq 2\pi$ e scegliendo quindi $M \in \mathbb{N}$ tale che

$$2M\pi \leq T < 2(M+1)\pi,$$

si ha quindi che

$$4ME_0 = \int_0^{2M\pi} |u_t(s,0)|^2\,ds \leq \int_0^T |u_t(s,0)|^2\,ds \leq \int_0^{2(M+1)\pi} |u_t(s,0)|^2\,ds = 4(M+1)E_0.$$

4. Si trovino, se esistono, condizioni necessarie e sufficienti sulla funzione f regolare, affinchè si possa trovare una funzione armonica $u :]0,L[^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u_x(0,y) = u_x(L,y) = u_y(x,0) = 0 \qquad u_y(x,L) = f(x).$$

Soluzione. Si tratta di capire se il problema di Neumann non omogeneo sul quadrato $Q =]0,L[^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = F & \text{su } \partial Q, \end{cases}$$

con $F = f$ per $x \in (0,L)$ e $y = L$, e zero altrove ammette soluzione. Dalla formule di Gauss-Green si ottiene

$$\int_Q \Delta u\,dx = \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_{\partial Q} F\,dS = \int_0^L f(\sigma)\,d\sigma,$$

pertanto condizione necessaria affinchè il problema sia risolubile è che $\int_0^L f(\sigma)\,d\sigma = 0$.
La soluzione può essere cercata separando le variabili $u(x,y) = X(x)Y(y)$ e ottenendo i problemi

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & x \in]0,L[, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 & y \in]0,L[, \\ Y'(0) = 0, \end{cases}$$

da cui $X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ e $Y_n(y) = \cosh\left(\frac{\pi n y}{L}\right)$ e quindi

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\big(\frac{\pi n x}{L}\big)\cosh\big(\frac{\pi n y}{L}\big).$$

Andando a imporre la condizione sulla derivata in y, per $y = L$, si ha

$$u_y(x,y)\Big|_{y=L} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi n}{L} A_n \cos\big(\frac{\pi n x}{L}\big)\sinh(\pi n) = f(x).$$

Chiamato $\overline{f}$ il prolungamento pari della $f(x)$ su $[-L, L]$, si può ottenere uno sviluppo in coseni tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\big(\frac{\pi n x}{L}\big)$$

e quindi si deve soddisfare la uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi n A_n}{L} \cos\big(\frac{\pi n x}{L}\big) \sinh(n\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\big(\frac{\pi n x}{L}\big)$$

e ciò è possibile se e solo se $f_0 = 0$, cioè se $\int_0^L f(x)\, dx = 0$. La soluzione si trova quindi imponendo

$$A_n = \frac{L f_n}{\pi n \sinh(n\pi)}.$$

Osserviamo inoltre che il problema non ha soluzione unica, dato che se u è soluzione, allora anche $u + c$ è soluzione, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

5. Sia per $\alpha > 0$ dato l'operatore $A = I - \alpha^2 \Delta$ con dominio le funzioni regolari $u :]-\pi, \pi[^3 \to \mathbb{C}$ che sono 2π-periodiche rispetto alle direzioni coordinate e sono a media nulla. Sia poi $G = A^{-1}$ e si definisca, per $N \in \mathbb{N}$

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} (I - G)^n$$

Scrivere in termini delle variabili di Fourier sia A che D_N e dimostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$, l'operatore D_N è lineare e continuo da $L^2(]-\pi, \pi[^3)$ in se stesso.

Calcolare la norma operatoriale $\|D_N\|$ e caratterizzare, se possibile, il limite di D_N per $N \to +\infty$

Soluzione. Passando alle variabili di Fourier, se $u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, l'operatore A si scrive come

$$Au = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \widehat{Au}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

con

$$\widehat{Au}(\mathbf{k}) = (1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2) \widehat{u}(\mathbf{k}).$$

Scrivendo quindi $D_N u = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{D_N u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ si ha, sostituendo,

$$\widehat{D_N u}(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\alpha^2 |\mathbf{k}|^2}{1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2} \right)^n \widehat{u}(\mathbf{k}) = (1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2) \left[1 - \left(\frac{\alpha^2 |\mathbf{k}|^2}{1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2} \right)^{N+1} \right] \widehat{u}(\mathbf{k}).$$

Osserviamo quindi che se $\widehat{D_N}(\mathbf{k})$ è il simbolo (fattore moltiplicativo di $\widehat{u}(\mathbf{k})$) si ha

$$1 \leq \widehat{D_N}(\mathbf{k}) \leq N + 1 \qquad \forall\, \mathbf{k},$$

e che per $|\mathbf{k}|$ grande o

$$\widehat{D_N}(\mathbf{k}) \sim (N + 1) \frac{1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2}{\alpha^2 |\mathbf{k}|^2},$$

e che quindi $\widehat{D_N}(\mathbf{k}) \to N + 1$ per $|\mathbf{k}| \to +\infty$. Pertanto , usando l'uguaglianza di Parseval si ha che la norma di $\|D_N u\| = \mathcal{O}(N)$.

Inoltre per ogni $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ fissato si ha che

$$\widehat{D_N}(\mathbf{k}) \leq 1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2 \qquad \text{e} \qquad \widehat{D_N u}(\mathbf{k}) \overset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1 + \alpha^2 |\mathbf{k}|^2 \widehat{u}(\mathbf{k}) = \widehat{Au}(\mathbf{k}).$$