

Corso di Laurea in Matematica

Prova di Analisi Matematica 3

19 dicembre 2016

1. Sia data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , e tale che $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Mostrare che, fissati $0 < a < b < 2\pi$ si ha

$$f * \chi_{[a,b]} \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Mostrare inoltre che $f * \chi_{[a,b]} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R})$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo 1. Sia $y_n(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_n(t) = f(nt) y_n(t) \\ y_n(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

3. Si consideri per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la successione di funzioni $\{f_n\}$ definite come

$$f_n(x) := \operatorname{sgn}[\sin(2^n \pi x)], \quad \text{for } x \in [0, 1].$$

Mostrare che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0, 1)$.

Discutere se $\{f_n\}$ è un sistema completo.

Sugg.: Può essere utile considerare la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1] \\ -1 & x \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

4. Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Dimostrare che se $u > 0$, allora u è costante.

Sugg.: Usare la proprietà della media sui volumi

Il risultato è vero se u è armonica e positiva con $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$?

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{txx} - \beta^2 u_{xx} = 0 & (t, x) \in]0, T[\times]0, \pi[, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in]0, T[, \\ u(0, x) = \sin^3(x) & x \in]0, \pi[, \end{cases}$$

dove $T \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$. Si può caratterizzare il comportamento per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione?