

Corso di Laurea in Matematica

Prova di Analisi Matematica 3

25 gennaio 2017

1. a) La funzione $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ è periodica?
b) La funzione di classe C^1 definita come $g(x) := \cos(x^2)$ è periodica?
c) Sia data una funzione h , non necessariamente derivabile, periodica di periodo 2π . La funzione $h(x^2)$ risulta periodica?
2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{8}{(1+x^2)(9+x^2)}.$$

Sugg. Calcolare preliminarmente la trasformata di $e^{-|y|}$

3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|^{2/3}} & |x| > 1 \end{cases}$$

Si discuta, usando il decadimento all'infinito di f e in particolare se $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * f \in L^2(\mathbb{R})$ e se $f * f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sugg. "Spezzare" l'integrale che definisce la convoluzione usando $-x/2$, $x/2$, e $3x/2$

4. Sia $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione armonica (dove il Laplaciano di un vettore è definito come il Laplaciano componente per componente). Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto (x \cdot \nabla) \mathbf{u}(x) := \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x)$$

è armonica.

5. Risolvere il problema al contorno e ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & x \in]0, \pi[\times]0, T[, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in]0, T[, \\ u(0, x) = \sin(x) & x \in]0, \pi[, \end{cases}$$

Caratterizzare il limite per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione.